Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 5 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 3 de Septiembre del 2008

Error de Integración Numérica

Vimos en la clase pasada las siguientes fórmulas de integración numérica:

- Punto medio

$$I_M(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

- Trapecio

$$I_T(f) = \frac{(b - a)}{2}(f(a) + f(b))$$

- Simpson

$$I_S(f) = \frac{(b - a)}{6}\left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Se define como el error de integración a la cantidad:

$$E_n(x) = \int_a^b (f(x) - P_n(x)) \cdot dx$$

Así el error para las fórmulas vistas en clases es:

- Punto medio

$$E_M(f) = \frac{1}{24}f''(\xi)(b - a)^3$$

- Trapecio

$$E_T(f) = -\frac{1}{12}f''(\xi)(b - a)^3$$

- Simpson

$$E_S(f) = -\frac{1}{2880}f^{(4)}(\xi)(b - a)^5$$

También se puede calcular la integral por tramos, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n intervalos iguales de tamaño $h = \frac{b-a}{n}$. Así de obtienen la fórmulas compuestas para los errores de integración:

- Trapecio Compuesto

$$E_{nT}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b - a) \cdot h^2$$

- Simpson Compuesto

$$E_{nS}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b - a) \cdot h^4$$

Problema 1. Se desea calcular $\ln(2)$ de manera que tenga una precisión de 6 decimales (osea que el error esté acotado por $\epsilon \leq 10^{-6}$). Primero notemos que $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Para lograr lo deseado se proponen 2 métodos de trabajo:

- Se divide el intervalo $[1,2]$ en n subintervalos e integramos usando Trapecios compuesto.
- Se divide el intervalo $[1,2]$ en m subintervalos e integramos usando Simpson compuesto.

Determine los valores mínimos de n y m para los que se cumpla lo pedido y calcule la cantidad de evaluaciones de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que son requeridas por cada método.

Problema 2. (Problema 1, Control 2, Primavera 2007) Se desea calcular numéricamente la integral:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

1. Muestre acotando superiormente $\frac{1}{1+x^6}$ por $\frac{1}{x^6}$, que se puede determinar $a \geq 0$ tal que $\int_a^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} \leq \frac{1}{5} \cdot 10^{-5}$. Determine el menor a que se obtiene así.
2. Demuestre la fórmula del error de Trapecios Compuestos.
3. Para calcular $I = \int_0^a \frac{dx}{1+x^6}$, utilizaremos la fórmula de trapecios compuestos. Exprese en función de $M_2 = \max_{x \in [0,a]} |f''(x)|$, la cantidad N de puntos de evaluación necesarios para calcular esta integral con un error inferior a $\frac{1}{5} \cdot 10^{-5}$.

Problema 3. Encuentre la fórmula del error de integración para los problemas vistos en la auxiliar anterior.