Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 4 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 27 de Agosto del 2008

Integración Numérica

Un problema habitual es calcular la integral $I = \int_a^b f(x)dx$, especialmente en los casos cuando no se conoce la primitiva, ni la expresión algebraica de f (i.e. la mayoría de las ocasiones en la vida real). Para ello, se utilizan métodos numéricos de integración numérica, basado en lo que ya se aprendió en el capítulo anterior sobre polinomios de interpolación.

Si tenemos los puntos $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ y sus respectivas evaluaciones en f, $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$, se busca su polinomio de interpolación P_n de grado n de manera que $I^* = \int_a^b P_n(x)dx$, donde $I^* \approx I$. Para este caso es conveniente escribir P_n en la base de Lagrange osea si

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j^n(x)$$

donde:

$$L_j^n(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Así:

$$I^* = \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j^n(x) \cdot dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\alpha_j^n$$

en donde:

$$\alpha_j^n = \int_a^b L_j^n(x) \cdot dx$$

Pero como las bases de Lagrange son un tanto 'enrredadas' cuando n es muy grande, nos enfocaremos en encontrar α_j^n en los casos particulares cuando:

- $n = 0$ (Punto medio)
$$I^* = (b - a) f \left(\frac{a + b}{2} \right)$$
- $n = 1$ (Trapecio)
$$I^* = \frac{(b - a)}{2} (f(a) + f(b))$$
- $n = 2$ (Simpson)
$$I^* = \frac{(b - a)}{6} \left(f(a) + 4 \cdot f \left(\frac{a + b}{2} \right) + f(b) \right)$$

Finalmente se define precisión de una fórmula de integración numérica, al $n \in \mathbb{N}$, tal que si $Q \in P_n$ (polinomios de grado n) entonces $I(Q) = I^*(Q)$.

Problema 1. Para calcular la integral de funciones en el intervalo $[-1,1]$ se propone una fórmula numérica del tipo

$$\int_{-1}^{1} f \approx I(f) = A\cdot f(0) + B\cdot f(1) + C\cdot f(-1) + D[f'''(1) - f'''(-1)]$$

a) Calcule los valores de las constantes A, B, C y D de modo que la fórmula sea exacta para polinomios de grado inferior o igual a 4.

b) Encuentre la precisión de la fórmula.

Solución Problema 1.

(**a**)Vamos verificando que la fórmula sea exacta desde los polinomios de grado 0 (constantes) hasta los de grado cuatro. En este caso es conveniente usar los polinomios canónicos. Así:

1. Grado 0: $f(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot dx = A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D\cdot[0-0] \Rightarrow 2 = A+B+C$$

2. Grado 1: $f(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} x\cdot dx = A\cdot 0 + B\cdot 1 + C\cdot(-1) + D\cdot[0-0] \Rightarrow 0 = B-C$$

3. Grado 2: $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2\cdot dx = A\cdot 0 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D\cdot[0-0] \Rightarrow \frac{2}{3} = B+C$$

4. Grado 3: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'''(x) = 6$

$$\int_{-1}^{1} x^3\cdot dx = A\cdot 0 + B\cdot 1 + C\cdot(-1) + D\cdot[6-6] \Rightarrow 0 = B-C$$

5. Grado 4: $f(x) = x^4 \Rightarrow f'''(x) = 24x$

$$\int_{-1}^{1} x^4\cdot dx = A\cdot 0 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D\cdot[24-(-24)] \Rightarrow \frac{2}{5} = B+C+48D$$

Finalmente resolviendo el sistema de ecuaciones planteado llegamos a que los valores de las constantes son: $A = \frac{4}{3}$, $B = C = \frac{1}{3}$ y $D = -\frac{1}{180}$ para que la fórmula propuesta sea por lo menos exacta, para los polinomios de grado 4.

(**b**) Por construcción la fórmula es exacta para polinomios de grado igual o inferior a 4. Por lo tanto su presición es mayor o igual a 4. Veamos hasta donde llega:

1. Grado 5: $f(x) = x^5 \Rightarrow f'''(x) = 60x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^5\cdot dx = \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(-1) - \frac{1}{180}\cdot[60-60] \Rightarrow 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

   De aquí la precisión es al menos 5.

2. Grado 6: $f(x) = x^6 \Rightarrow f'''(x) = 120x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^6\cdot dx = \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{180}\cdot[120-(-120)] \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{240}{180}$$

   Lo último es falso, por lo que la precisión de la fórmula es 5.

Problema 2. Para aproximar $\int_a^b f$ se propone la siguiente fórmula:

$$I_N(f) = C_1 f(a) + C_2 f(s), \quad s \in [a, b]$$

a) Determine las constantes C_1 y C_2 de modo que $I_N(f)$ tenga precisión 1.

b) Determine el valor de s, de modo que $I_N(f)$ tenga precisión máxima.

Solución Problema 2.

a) Para que tenga precisión 1 tenemos que se deben cumplir las siguientes igualdades:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1$$

$$\int_a^b x \cdot dx = C_1 \cdot a + C_2 \cdot s$$

Llegando a un sistema de ecuaciones muy similar al del problema 1. En clases hicimos el problema geométricamente llegando a los siguientes resultados: $C_1 = \frac{1}{2}\frac{(b-a)\cdot(2s-a-b)}{(s-a)}$ y $C_2 = \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{(s-a)}$.

b) En la parte anterior impusimos que la fórmula fuese exacta para polinomios de grado 1, luego su precisión es al menos 1. Ahora impongamos que es exacta para polinomios de grado 2, osea:

$$\int_a^b x^2 \cdot dx = C_1 \cdot a^2 + C_2 \cdot s^2$$

Con C_1 y C_2 calculados en la parte anterior. Es fácil notar que ésta es una ecuación difícil de resolver, por lo que buscaremos un polinomio cuadrático un poco más conveniente que el canónico $f(x) = x^2$. Un polinomio que puede ser de utilidad es el polinomio cuadrático más simple que hace que $f(a)$ y $f(s)$ se anulen, osea $f(x) = (x-a)\cdot(x-s)$. Así la ecuación a resolver es:

$$\int_a^b (x-a)(x-s) \cdot dx = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

Así:

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(x-s) \cdot dx &= \int_a^b (x-a)(x-a+a-s) \cdot dx = \int_a^b (x-a)^2 + (a-s)(x-a) \cdot dx \\ &= \frac{(b-a)^3}{3} + (a-s) \cdot \frac{(b-a)^2}{2} = 0\end{aligned}$$

Despejando s obtenemos: $s = \frac{a+2b}{3}$. Es fácil verificar que efectivamente $s \in [a, b]$. Luego la fórmula al ser exacta para polinomios cuadráticos tiene presición mayor o igual a 2. Para ver lo que sucede con los cúbicos simplemente uso la función $f(x) = (x-s)^2(x-a)$ (con el s encontrado), que se anula en a y s. Como $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ es imposible que $\int_a^b f(x) \cdot dx = 0$ que es lo que impone la fórmula. Así la precisión de la fórmula es 2.