Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 3 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 20 de Agosto del 2008

Problema 1. Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 2]$. Se desea interpolar esta función de modo que el error de interpolación sea inferior o igual a 10^{-12}. Para ello se proponen dos alternativas de trabajo:

1. El intervalo $[1, 2]$ se divide en N partes iguales y en cada sub-intervalo de largo $h = \frac{1}{N}$ se interpola f mediante un polinomio cuadrático usando los 2 puntos externos más el punto central del subintervalo.

2. El intervalo $[1, 2]$ se divide en M partes iguales y en cada sub-intervalo de largo $h = \frac{1}{M}$ se interpola f mediante un polinomio cúbico usando los 2 puntos externos más los dos puntos que dividen el sub-intervalo en 3 partes iguales.

Determine cotas inferiores de los valores de N y M que garantizan que el error de interpolación sea menor a 10^{-12}. Indique además cuantas evaluaciones exactas se requieren en cada caso y cual de las dos alternativas requiere menos evaluaciones exactas de f.

Observación: No se pide encontrar los polinomios, sino cuantos polinomios se necesitan en cada caso.

Problema 2. (Problema 3, Control 1, Primavera 2007)

1. Demuestre (contanto las incógnitas y las ecuaciones) que el siguiente problema tiene al menos una solución: "Encuentre $B(x)$ polinomio cuadrático por pedazos definido en los tramos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ que cumplan con las condiciones:
   (i) $B(x)$ es continua y con derivada continua ($B \in C^1$).
   (ii) $B(0) = B(3) = 0$, $B(1) = \alpha$ y $B(2) = \beta$.
   Más precisamente, pruebe que el problema tiene un grado de libertad, y que ese puede ser la derivada de B en $x = 0$.

2. Llamando P_1, P_2 y P_3 a los tres polinomios cuadráticos que componen a B en el caso $B(1) = B(2) = 1$ y $B'(0) = 0$, encuéntrelos explicitamente.

Problema 3. Se busca $s : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por dos polinomios cúbicos p, q de acuerdo a:

$$s(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \in [-2, 0] \\ q(x) & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

que sea de clase $C^2([-2, 2])$ y que interpole a los datos $\{0, 0, 0, 1, 0\}$ (eje y) en la malla $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (eje x).

a) Haga un recuento del número de incógnitas escalares necesarias para conocer $s(x)$. Escriba (sin resolver) las ecuaciones que permitirían determinar los valores de la incógnitas.

b) Sea a la derivada de s en el origen(o sea $a = s'(0)$). Encuentre las expresiones de $p(x)$ y $q(x)$ en función de a.

c) Determine el valor de la constante a de modo que la función $s(x)$ resultante satisfaga todas las propiedades requeridas. En este caso explícitamente $s(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Problema 4.(**Propuesto**) En este problema se deberá encontrar una fórmula para la función spline cúbica $s(x)$ que interpola los datos $\{0, 1, 2\}$ (eje y) en la malla $\{-1, 0, 1\}$ (eje x) siguiendo la metodología siguiente. Recuerde que en los extemos $s''(x)$ vale cero. Llamaremos a al valor (desconocido) de la segunda derivada de s en el origen.

a) Encuentre una fórmula para $s''(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ en términos de a, de la forma:

$$s''(x) = \begin{cases} ... & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ ... & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

b) Integre dos veces la expresión anterior para obtener una fórmula de $s(x)$ en términos de a y cuatro constantes de integración.

c) Use las condiciones de interpolación para determinar los valores de las constantes de integración en función de a.

d) Encuentre el valor de la constante a y escriba la función spline cúbica resultante.

Problema 5.(**Propuesto**) Problema 2, Control 1, Primavera 2007

Para aproximar la funcin exponencial e^x en el intervalo $[0, 1]$ se pienza utilizar una familia de polinomios de interpolación cúbicos usando valores exactos de esta función en puntos equidistantes del intervalo $[0, 1]$. Cuántos puntos de interpolación se necesitan al menos para que el error de interpolación de cada uno de estos polinomios sea menor que $\epsilon = 10^{-12}$?

Desarrolle su argumentación en detalle y explique como acota el error de interpolación (use la fórmula del error de interpolación conocida para deducir una cota del error).

Problema 6.(**Propuesto**) Problema 1b, Control 1, Primavera 2007

Escriba en las 3 bases vistas en clases (canónica, Lagrange y Newton) el polinomio de interpolación para los datos $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 0$.