Interpolación
Semana 3

Raúl Gormaz
mailto:rgormaz@dim.uchile.cl

14 de agosto de 2008

Spline Cúbica

Supongamos dado un conjuntos de datos $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$.
donde para cada intervalo $I_j = [t_{j-1}, t_j]$
se utiliza un polinomio cúbico $S_j : I_j \longrightarrow \mathbb{R}$
La función definida por pedazos debe ser C^0, C^1 y C^2.
Si contamos parámetros y ecuaciones, resultan
$4n$ coeficientes, y solo $4n - 2$ ecuaciones.

Spline Cúbica

Según lo visto con el polinomio cúbico de Hermite, hay un único polinomio cúbico que interpola valores de la función y de la derivada en los extremos de un intervalo.
En cada intervalo, conociendo $y_a,\ y'_a,\ y_b,\ y'_b$, se construye:

$$S(t) = y_a + y'_a(t-a) + \frac{m - y'_a}{h}(t-a)^2 + \frac{y'_b - 2m + y'_a}{h^2}(t-a)^2(t-b)$$

La función definida es automaticamente C^0 yC^1
Falta asegurar que sea C^2.

$$S''(t) = \frac{2}{h}(m - S'(a)) + \frac{S'(b) - 2m + S'(a)}{h^2}[4(t-a) + 2(t-b)]$$

Spline Cúbica

$S''_j(t_j) = S''_{j+1}(t_j), \quad j = 1, \ldots, n-1$
Y se agregan 2 condiciones adicionales (Spline cubica **natural.**):

$$S''_1(t_0) = 0 = \frac{6m_1 - 4y'_0 - 2y'_1}{h_1}$$

$$\implies \frac{2}{h_1}y'_0 + \frac{1}{h_1}y'_1 = \frac{3}{h_1}m_1$$

$$S''_n(t_n) = 0 = \frac{4y'_n + 2y'_{n-1} - 6m_n}{h_n}$$

$$\implies \frac{1}{h_1}y'_{n-1} + \frac{2}{h_1}y'_n = \frac{3}{h_n}m_n$$

Spline Cúbica

Para escribir las ecuaciones correspondientes a $S_j''(t_j) = S_{j+1}''(t_j), \ \ j = 1, \dots, n-1$, considere

Para $S_j''(t_j)$: En I_j, $a = t_{j-1}$; $b = t_j$; $t = t_j$

Para $S_{j+1}''(t_j)$: En I_{j+1}, $a = t_j$; $b = t_{j+1}$; $t = t_j$

Spline Cúbica

Juntando todas las ecuaciones, se obtiene matricialmente:

$$\begin{bmatrix} (\frac{2}{h_1}) & \frac{1}{h_1} & & & & \\ \frac{1}{h_1} & (\frac{2}{h_1}+\frac{2}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & & & \\ & \frac{1}{h_2} & (\frac{2}{h_2}+\frac{2}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{h_{n-1}} & (\frac{2}{h_{n-1}}+\frac{2}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ & & & & \frac{1}{h_n} & (\frac{2}{h_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3m_1/h_1 \\ 3m_1/h_1 + 3m_2/h_2 \\ 3m_2/h_2 + 3m_3/h_3 \\ \vdots \\ 3m_{n-1}/h_{n-1} + 3m_n/h_n \\ 3m_n/h_n \end{bmatrix}$$