Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

Auxiliar 2 MA33A-1
Profesor de Cátedra: Raúl Gormaz
Profesor Auxiliar: Eugenio Quintana
Fecha: 13 de Agosto del 2008

Problema 1. El puente "Ponticello" recientemente inaugurado, conecta los lados A y D de un río. La forma originalmente diseñada es una recta horizontal que une A con D y que se apoya en pilares en los puntos B y C (ver línea punteada en la figura 1). Problemas de asentamiento del terreno producen el hundimiento de los pilares centrales en una misma cantidad Δ. Se requiere calcular el hundimiento **H** máximo del puente (el que por simetría ocurre en el centro) para así verificar que no se hallan sobrepasado los valores máximos admisibles indicados en la norma oficial de puentes.

El experto en puentes, Ingeniero Juanito Bridge, nos explica que la forma deformada del puente es una función $f(x)$ que sólo puede tener discontinuidades a partir de su tercera derivada en los puntos de apoyo B y C (o sea $f \in C^2$). Además, al no haber cargas transversales , en cada tramo la función coincide con un polinomio cúbico. Finalmente, nos explica que el puente está diseñado de modo que la pendiente de la curva en los extremos A y D sea siempre 0.

Llamaremos P, Q y R a los polinomios que representan a f en los tramos AB, BC y CD respectivamente y supondremos que los puntos A, B, C y D están ubicados en las coordenadas x iguales a 0, 1, 2 y 3 respectivamente.

1. Sean $m \in \mathbb{R}$. Encuentre, en términos de m y Δ, la expresión del polinomio P si se impone que $P'(1) = m$
2. Escriba la expresión del polinomio Q en términos de Δ y m. (Indicación: Use la simetría del problema).
3. Calcule el valor de m de modo que efectivamente la función f determinada anteriormente cumpla las condiciones indicadas por el Ingeniero Bridge.
4. Encuentr en función de Δ, la deformación máxima **H** del puente.

Problema 2. Encuentre $B(t)$, polinomio cuadrático por pedazos, es decir, encuentre P_1, P_2 y P_3 polinomios de 2^{do} grado, tal que se cumpla: $B(0) = 0$, $B(1) = \frac{1}{2}$, $B(3) = 0$, $B(t) = 0$ si $t \notin [0, 3]$, $B \in C^1$ (continua con derivada continua) y

$$B(t) = \begin{cases} P_1(t) & t \in [0,1] \\ P_2(t) & t \in [1,2] \\ P_3(t) & t \in [2,3] \end{cases}$$

Problema 3. Se desea interpolar la función $f(x) = \cos(x)$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de manera que el error de interpolación esté acotado por 10^{-6}. Para ello se utilizan 3 estrategias:

1. Dividir $[0, \frac{\pi}{2}]$ en n intervalos y usar interpolación lineal en cada intervalo.
2. Dividir $[0, \frac{\pi}{2}]$ en m intervalos y usar interpolación cuadrática en cada intervalo, agregando el punto medio.
3. Dividir $[0, \frac{\pi}{2}]$ en r intervalos y usar interpolación cúbica en cada intervalo, agregando los puntos que dividen cada intervalo en $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de él.

Se pide calcular n, m y r y concluir cual es el método que requiere menos valores de $\cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Problema 4. (Propuesto) Demuestre que un polinomio de grado n que interpola $n + 1$ datos es único. Además, si $P(x)$ es este único polinomio, encuentre otro diferente de P que interpole los mismos datos salvo el primero (x_0).