Interpolación Polinomial
Resumen

Raúl Gormaz
mailto:rgormaz@dim.uchile.cl

10 de agosto de 2008

El problema de interpolación

Supongamos un conjuntos de datos $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$. Se busca un polinomio P de grado a lo mas n que cumpla con
$P(t_j) = y_j, \; j = 0, \ldots, n$
Este polinomio, si existe, es llamado polinomio de interpolación para estos datos.
Teorema 1. El Polinomio de interpolación Existe y es Único.

Existencia y Unicidad

Unicidad Supongamos que P y Q resuelven el problema de interpolación

$P(t_0) - Q(t_0) = 0$

$\ldots$

$P(t_n) - Q(t_n) = 0$

El polinomio de grado n, $P - Q$ tiene $n + 1$ raices.

El polinomio $P - Q$ es nulo,

por lo tanto $P = Q$.

Existencia y Unicidad

Existencia Caso $y_0 = 1$ y $y_j = 0, q\ j = 1, \ldots, n$.

$P(t_1) = 0$ entonces $t - t_1$ es un factor

$\ldots$

$P(t_n) = 0$ entonces $t - t_n$ es un factor

El polinomio $P(t) = \lambda(t - t_1) \cdots (t - t_n)$.

$P(t_0) = 1$ entonces $\lambda(t_0 - t_1) \cdots (t_0 - t_n) = 1$.

$$\lambda = \frac{1}{(t_0 - t_1)} \cdots \frac{1}{(t_0 - t_n)}.$$

Existencia y Unicidad

El polinomio solución lo llamaremos L_0^n , de grado n, vale 1 en $t = t_0$ (y 0 en los otros nodos).

$$L_0^n(t) = \frac{(t - t_1)}{(t_0 - t_1)} \cdots \frac{(t - t_n)}{(t_0 - t_n)}.$$

En general, el que vale 1 en $t = t_k$,

$$L_k^n(t) = \prod_{j=0,\ j \neq k}^{n} \frac{(t - t_j)}{(t_k - t_j)}$$

Base de Lagrange de los polinomios de grado n.

Problemas básicos

Problema 1: Tengo el polinomio P_n, que resuelve el problema de interpolación para los datos $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$.
Obtengo un dato adicional (t_{n+1}, y_{n+1})
¿Como obtengo el nuevo polinomio P_{n+1}, de grado $n+1$ que interpola todos los datos ?
IDEA $P_{n+1}(t) = P_n(t) + Q(t)$

Q es de grado $n+1$.

$Q(t_j) = 0, \; j = 0, \ldots, n$

$Q(t) = \lambda(t - t_0) \cdots (t - t_n)$

λ es el coeficiente de la mayor potencia de t, esto es, de t^{n+1}.

Problemas básicos

Problema 2: ¿Como se calcula el coeficiente de t^n en P_n, para datos conocidos?

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (t_k - t_j)}$$

PISTA

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} \frac{(t - t_j)}{(t_k - t_j)}$$

Ejemplo para $n = 1$, esto es, 2 nodos. Diferencia dividida.
NOTACION $f[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ Diferencia dividida de orden n.

Problemas básicos

0:

$$P_0(t) = f(t_0) \equiv f[t_0]$$

1:

$$P_1(t) = P_0(t) + Q(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0)$$

2:

$$P_2(t) = P_1(t) + Q(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1)$$

n:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f[t_0, \dots, t_k](t - t_0) \cdots (t - t_{k-1})$$

Problemas básicos

Problema 3: Tenemos 2 polinomios de interpolación

P para los datos $(t_0, f(t_0)), \dots, (t_n, f(t_n))$
Q para los datos $(t_1, f(t_1)), \dots, (t_{n+1}, f(t_{n+1}))$
Ambos son de grado n

¿Como formar el polinomio $R(t) = P_{n+1}$ que resuelva el problema de interpolación con todos los datos?
IDEA: Formarlo como $R(t) = \alpha(t)P(t) + \beta(t)Q(t)$
Es claro que α y β deben ser polinomios de grado 1

Problemas básicos

$$
\begin{array}{rll}
f(t_0) & =\alpha(t_0)P(t_0) & +\beta(t_0)Q(t_0) \\
f(t_1) & =\alpha(t_1)P(t_1) & +\beta(t_1)Q(t_1) \\
\dots & \dots & \dots \\
f(t_n) & =\alpha(t_n)P(t_n) & +\beta(t_n)Q(t_n) \\
f(t_{n+1}) & =\alpha(t_{n+1})P(t_{n+1}) & +\beta(t_{n+1})Q(t_{n+1})
\end{array}
$$

Problemas básicos

$$
\begin{array}{llll}
f(t_0) & = \alpha(t_0)f(t_0) & +\beta(t_0)Q(t_0) \\
f(t_1) & = \alpha(t_1)f(t_1) & +\beta(t_1)f(t_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
f(t_n) & = \alpha(t_n)f(t_n) & +\beta(t_n)f(t_n) \\
f(t_{n+1}) & = \alpha(t_{n+1})P(t_{n+1}) & +\beta(t_{n+1})f(t_{n+1})
\end{array}
$$

Problemas básicos

$$R(t) = \frac{t - t_{n+1}}{t_0 - t_{n+1}} P(t) - \frac{t - t_0}{t_0 - t_{n+1}} Q(t)$$

Identificando los coeficientes de t^{n+1} a ambos lados

$$R(t) \dashrightarrow f[t_0, \ldots, t_{n+1}]$$

$$\frac{t - t_{n+1}}{t_0 - t_{n+1}} P(t) \dashrightarrow \frac{1}{t_0 - t_{n+1}} f[t_0, \ldots, t_n]$$

$$-\frac{t - t_0}{t_0 - t_{n+1}} Q(t) \dashrightarrow -\frac{1}{t_0 - t_{n+1}} f[t_1, \ldots, t_{n+1}]$$

Existencia y Unicidad

Fórmula de recurrencia para las Diferencias Divididas

$$f[t_0, \ldots, t_{n+1}] = \frac{f[t_1, \ldots, t_{n+1}] - f[t_0, \ldots, t_n]}{t_{n+1} - t_0}$$

Ver Ejemplo

Error de Interpolación

¿Cual es el error que se comete al reemplazar $f(t)$ por $P_n(t)$?

$$f(t) = P_n(t) + E_n(t)$$

Sabemos que $E(t_j) = 0,\ j = 0, \ldots, n$. Pero interesa saber también que pasa para $t \neq t_j$.
IDEA: Agregar x como nuevo punto de interpolación.

Teorema 2.

$$E_n(x) = f[t_0, \ldots, t_n, x](x - t_0) \cdots (x - t_n)$$

Error de Interpolación

Aplicar el Teorema de Rolle (generalizado) a $E_n(t) = f(t) - P_n(t)$
Como tiene $n+1$ ceros ... su derivada n-esima se anula en algún punto.

$$\exists \xi \in (\min t_j, \max t_j) \text{ t.q. } E_n^{(n)}(\xi) = 0$$

Teorema 3.

$$f[t_0, \ldots, t_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \text{ para algún } \xi \in (\min t_j, \max t_j)$$

Error de Interpolación

Corolario 1: Para cada $x \in [a, b]$, existe un $\xi_x \in (a, b)$ tal que:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - t_0)\cdots(x - t_n)$$

(1) El $(n+1)!$ en el denominador no significa que el error disminuye necesariamente cuando $n \to \infty$.

(2) Es usual suponer que la derivada n-esima de f tiene máximo, y se anota M_n.

(3) Podemos estudiar (acotar) $\prod_{j=0}^{n}(x - t_j)$

Error de Interpolación

Veamos unos ejemplos para el caso de nodos equidistantes: t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ...,$t_n = t_0 + nh$. Sea $H = nh$, el largo del intervalo de interpolación

$(n = 1)$ Interpolación lineal: $E_1 \leq \frac{1}{8} M_2 H^2$

$(n = 2)$ Interpolación cuadrática: $E_2 \leq \frac{1}{96} M_3 H^3$

$(n = 3)$ Interpolación cúbica: $E_3 \leq \frac{1}{1296} M_4 H^4$

...

Mas efectivo es disminuir H.

Nodos repetidos

Recordemos

Teorema 3.

$$f[t_0, \ldots, t_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \text{ para algún } \xi \in (\min t_j, \max t_j)$$

¿Que pasa si todos los t_j tienden a un punto común x?

En el límite se obtiene

Corolario 2.

$$f[x, \ldots, x] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

Nodos repetidos

Nota curiosa. ¿Que pasa con la formula de Newton?

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f[t_0, \ldots, t_k](t - t_0) \cdots (t - t_{k-1})$$

Newton tiende a Taylor:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(t - x)^k$$

Nodos repetidos

Problema de interpolación de Hermite clásico.
Conozco $f(a)$, $f'(a)$, $f(b)$ y $f'(b)$. ¿Como encuentro un polinomio con estas mismas características?
Es decir $P(a)$, $P'(a)$, $P(b)$ y $P'(b)$.
Imaginar que tengo el valor de f en dos puntos muy cercanos, a y a'. Lo mismo en b y b'

Nodos repetidos

$$
\begin{array}{ccccc}
a & f(a) & & & \\
 & & f[a, a'] & & \\
a' & f(a') & & f[a, a', b] & \\
 & & f[a', b] & & f[a, a', b, b'] \\
b & f(b) & & f[a', b, b'] & \\
 & & f[b, b'] & & \\
b' & f(b') & & &
\end{array}
$$

Nodos repetidos

$$
\begin{array}{llccc}
a & f(a) & & & \\
 & & f'(a) & & \\
a & f(a) & & \dfrac{f[a,b]-f'(a)}{b-a} & \\
 & & f[a,b] & & \dfrac{f'(a)+f'(b)-2f[a,b]}{(b-a)^2} \\
b & f(b) & & \dfrac{f'(b)-f[a,b]}{b-a} & \\
 & & f'(b) & & \\
b & f(b) & & &
\end{array}
$$

Spline Cúbica

Supongamos un conjuntos de datos $(t_0, y_0), \ldots, (t_n, y_n)$.
Pero para cada intervalo $I_j = [t_{j-1}, t_j]$
Se utiliza un polinomio cúbico $S_j : I_j \longrightarrow \mathbb{R}$
La función definida por pedazos debe ser C^0, C^1 y C^2.
Contar parámetros y ecuaciones.