Cálculo Numérico MA-33A

Lista de Problemas 2

Aproximación de Funciones

Problema 1. La función $\cos x$ es interpolada en el intevalo $[0, \pi]$ siguiendo las dos estrategias siguientes:

(a) Se divide el intervalo $[0, \pi]$ en n partes iguales de largo π/n. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se pasa la recta que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$.
(b) Se divide el intervalo $[0, \pi]$ en m partes iguales de largo π/m. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se pasa la parábola que pasa por los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})\right)$ y $(x_i, f(x_i))$.

Determine los menores valores posibles de n y m de modo tal que las formulas para el error de interpolación aplicadas a las aproximaciones anteriores aseguren un error inferior a 10^{-6}. [Respuestas: (a) $n = (\pi/\sqrt{8})10^3 \approx 1111$, (b) $2m = 100(\pi/3)3^{1/6} \approx 126$].

Problema 2. Se desea construir una función f tal que $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $f(x) = 1 + mx$ para $x \geq 1$. Para $x \in [0, 1]$, necesitaremos definir una función polinomial que conecte ambas ramas de f, esto es, que verifique P(0)=0 y P(1)=1, y para tener continuidad de las tangentes, $P'(0) = 0$ y $P'(1) = m$. Interprete geometricamente, en un gráfico, lo que se desea realizar.

Las dos construcciones siguientes permiten obtener el polinomio buscado. Verifiquelo.

(a) Contruya el polinomio de interpolación cúbico, utilizando la fórmula de Newton, que interpola los valores $f(-h) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(1 + h) = 1 + mh$. Obtenga entonces el polinomio límite, tomando $h \to 0$.

(b) Como antes, pero tomar el límite cuando $h \to 0$ en la tabla de las diferencias divididas, y luego escribir el polinomio.

(c) Existe algún valor de m para el cual el polinomio sea solo de grado 2? [resp. $m = 1/2$]

Problema 3. Se propone interpolar la función $sen(x)$ utilizando sus valores en $x = 0$, L, $2L$, $\ldots$, , nL. Es claro que el polinomio de grado n que interpole dichos valores podría ser poco representativo de la función original $sen(x)$. En efecto, vea que pasa para $L = \pi$.

Probar que si $L \leq 1$ entonces para todo $x \in [0, \pi]$ se tiene que para $n \to \infty$

$$|sen(x) - P_n(x)| \longrightarrow 0$$

Problema 4. Para cualquier función $f \in \mathscr{C}[0, 3]$, sea $P(f)$ el polinomio de la forma

$$P(f)(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3,$$

cuyos coeficientes son tales que $P(f)$ interpola a f en 0, 2 y 3.

(a) Demuestre que existen polinomios fijos $Q_0(x)$, $Q_2(x)$ y $Q_3(x)$ (calcúlelos) tales que

$$P(f) = f(0)Q_0 + f(2)Q_2 + f(3)Q_3.$$

(b) Demuestre que si f es tal que $\max\limits_{x\in[0,3]} |f(x)| \leq 1$ entonces

$$\max_{x\in[0,3]} |P(f)(x)| \leq \max_{x\in[0,3]} (|Q_0(x)| + |Q_2(x)| + |Q_3(x)|)$$

(c) Demuestre que la cota anterior es alcanzada (con cierto esfuerzo se puede probar que vale $1 + \frac{32}{45}\sqrt{3}$).

Problema 5. Considere el problema de calcular los coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ y $\beta_0, \dots, \beta_m$ tales que la función racional

$$r(x) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n}{\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m}$$

interpole a una función f en la malla $\{x_0, \dots, x_{m+n}\}$.

Muestre que los coeficientes son solución de un sistema lineal de ecuaciones y responda las dudas siguientes:

Este sistema tiene siempre solucion? Si existe solución, es única? Es toda solución del sistema lineal, adecuada para obtener la función interpolante $r(x)$?

Estudie primero un caso particular con n y m pequeños, por ejemplo $n = 2$, $m = 1$.

Problema 6. Sea $f \in \mathscr{C}^{2n}([0,1])$ y p un polinomio de grado $(2n-1)$ que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} p^{(k)}(0) &= f^{(k)}(0), \text{ y} \\ p^{(k)}(1) &= f^{(k)}(1), \end{aligned}$$

para todos los $k = 0, \dots, (n-1)$. Encuentre y demuestre una fórmula del error cometido al aproximar f por p en $[0,1]$.

Problema 7 (Spline cúbica)**.** Considere una malla $\{x_0, \dots, x_n\}$ incluida en el interior del intervalo $[a,b]$ y un conjunto de valores $\{y_0, \dots, y_n\}$. Se desea construir la función Spline cúbica en $[a,b]$ con respecto a estos datos, siguiendo una estrategia diferente a la vista en clases.

Para determinar esta función Spline $s(x)$, sean $a_0, \dots, a_n$ los valores de las segundas derivadas de $s(x)$ en los puntos de la malla. Como en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $s(x)$ es un polinomio de grado 3 entonces $s''(x)$ es un polinomio de grado uno. Es decir (verifíquelo) para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$ se cumple que

$$s''(x) = a_{i-1}\left(\frac{x_i - x}{h_i}\right) + a_i\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right).$$

Integre la ecuación anterior dos veces en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, utilice las condiciones inicial y final $s(x_{i-1}) = y_{i-1}$ y $s(x_i) = y_i$ respectivamente para obtener una fórmula de $s(x)$ en término de los coeficientes a_{i-1}, a_i, y_{i-1} e y_i. Finalmente, a partir del requisito de continuidad de $s'(x)$, obtenga un sistema de ecuaciones para poder calcular los a_j.