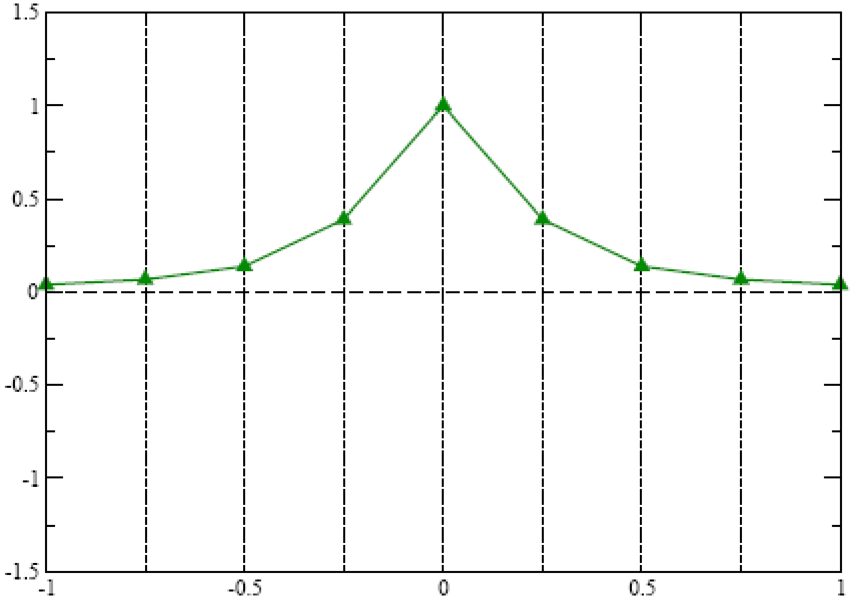
Interpolación

Dado un conjunto de datos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, m$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$

Queremos determinar una función

$$f(x)$$

tal que $f(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, m$

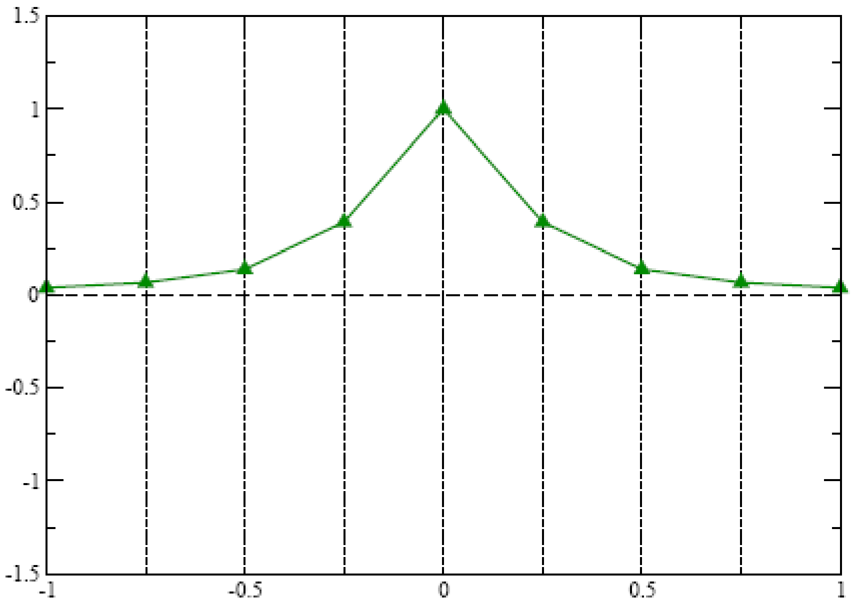


Esta función se denomina función interpolante

Interpolación

Usos de la Interpolación

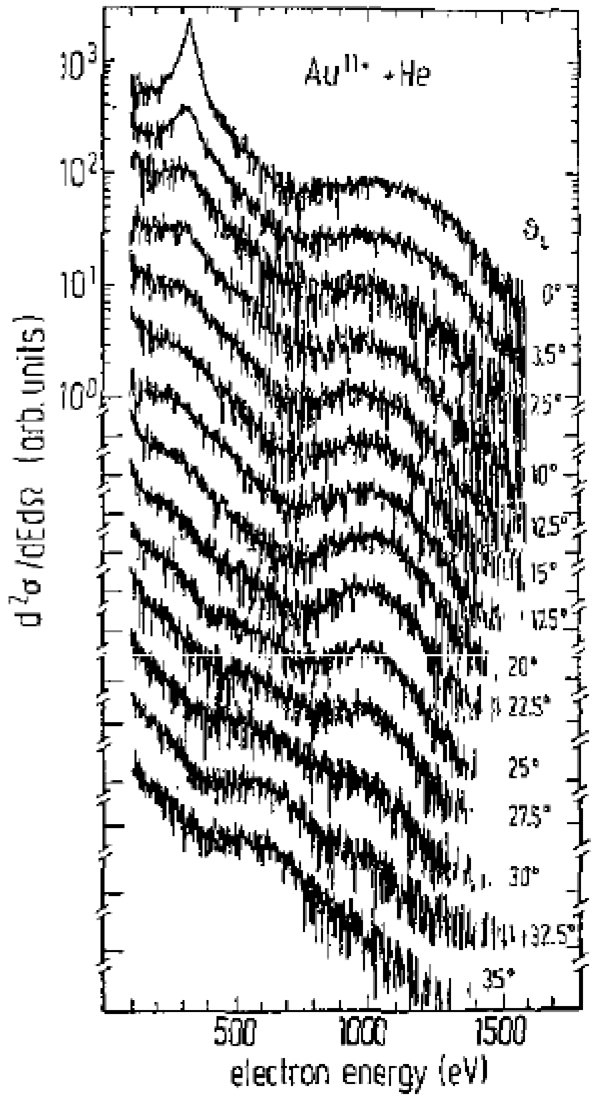
- ✔ Graficar una curva suave a través de un conjunto discreto de datos
- ✔ Obtener valores entre los datos de una tabla
- ✔ Derivar e integrar datos de una tabla
- ✔ Reemplazar una función complicada por una sencilla



Interpolación

Interpolación vs Aproximación

- ✔ La función interpolante pasa por todos los datos de la tabla
- ✔ La interpolación no es apropiada si los datos tienen mucho error. En estos casos es mejor suavizar primero los datos con, por ejemplo, el método de cuadrados mínimos.



Interpolación

<u>Aspectos importantes de la interpolación</u>

- ✔ Determinar cuales son las mejores funciones para interpolar un conjunto de datos.
- ✔ Especificar como se debe comportar la función entre los datos.
- ✔ Considerar la posibilidad de derivar e integrar los datos.
- ✔ Determinar si la función debe representar propiedades de los datos como suavidad, monotonicidad, convexidad y/o periodicidad.

Interpolación

Funciones Interpolantes

- ✔ Polinomios
- ✔ Polinomios por intervalos
- ✔ Funciones trigonométricas
- ✔ Funciones exponenciales
- ✔ Funciones racionales

Interpolación

Funciones Base

Consideremos un conjunto de *n* funciones $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$

Elegimos la función *f(x)* como la combinación lineal

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \phi_j(x)$$

Si *f(x)* es la función interpolante, entonces se debe cumplir que

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \phi_j(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

Sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas α_j

Interpolación

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_m) & \phi_2(x_m) & \dots & \phi_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A\overline{x} = \overline{y} \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \longleftarrow \\ \\ \overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \end{array} \right.$$

Existencia y Unicidad de la Solución

- ✔ Si m > n, la función interpolante no existe
- ✔ Si m < n, la solución no es única
- ✔ Si m = n, la solución existe y es única

Interpolación Polinómica

Base Monomial $\phi_j(x) = x^{j-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Matriz de Vandermonde

$$p_{n-1}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1}$$

Interpolación Polinómica

Método de Lagrange

$$\phi_j(x) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (x - x_k) \Bigg/ \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (x_j - x_k)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{n-1}(x) = y_1\phi_1(x) + y_2\phi_2(x) + \ldots + y_n\phi_n(x)$$

Ejemplo *n=3*

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= (x - x_2)(x - x_3)/(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ \phi_2(x) &= (x - x_1)(x - x_3)/(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \\ \phi_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2)/(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

$$p_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Interpolación Polinómica

Método de Newton

$$\phi_j(x) = \prod_{k=1}^{j-1}(x - x_k) \qquad \phi_1(x) = 1$$

$$\phi_j(x_i) = 0 \qquad i < j \longrightarrow A$$ matriz triangular

$$p_{n-1}(x) = \alpha_1 + \alpha_2\,(x - x_1) + \alpha_3(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \alpha_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

Ejemplo *n=3*

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 \\ \phi_2(x) &= (x - x_1) \\ \phi_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & 0 \\ 1 & (x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{pmatrix}$$

Interpolación Polinómica

Comparación entre las distintas bases

Las distintas bases polinómicas nos dan distintas representaciones del mismo polinomio, ya que existe un único polinomio de grado n-1 que pasa por los n puntos

- ✔ Base Monomial: A matriz de Vandermonde, se requieren $O(n^3)$ operaciones aritméticas. La interpolación se realiza sin problemas pero es muy dificil obtener valores precisos de los coeficientes ya que los algorítmos son inestables.
- ✔ Método de Newton: A matriz triangular, se requieren $O(n^2)$ operaciones aritméticas (se resuelve por sustitución).
- ✔ Método de Lagrange: tenemos el polinomio en forma explícita, pero es poco práctico ya que requiere más operaciones que la base monomial y resulta más dificultoso el cálculo de derivadas e integrales.

Interpolación Polinómica

Ejemplo para 3 puntos: (-2,-27) , (0,-1), (1,0)

Monomial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad p_2(x) = -1 + 5x - 4x^2$$

Lagrange

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_2(x) = -27\frac{x(x-1)}{(-2)(-2-1)} - \frac{(x+2)(x-1)}{(+2)(-1)}$$

Newton

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad p_2(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

Interpolación Polinómica

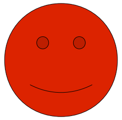
Evaluación de Polinomios: Método de Horner

Consideremos un polinomio de 4to grado (n=5)

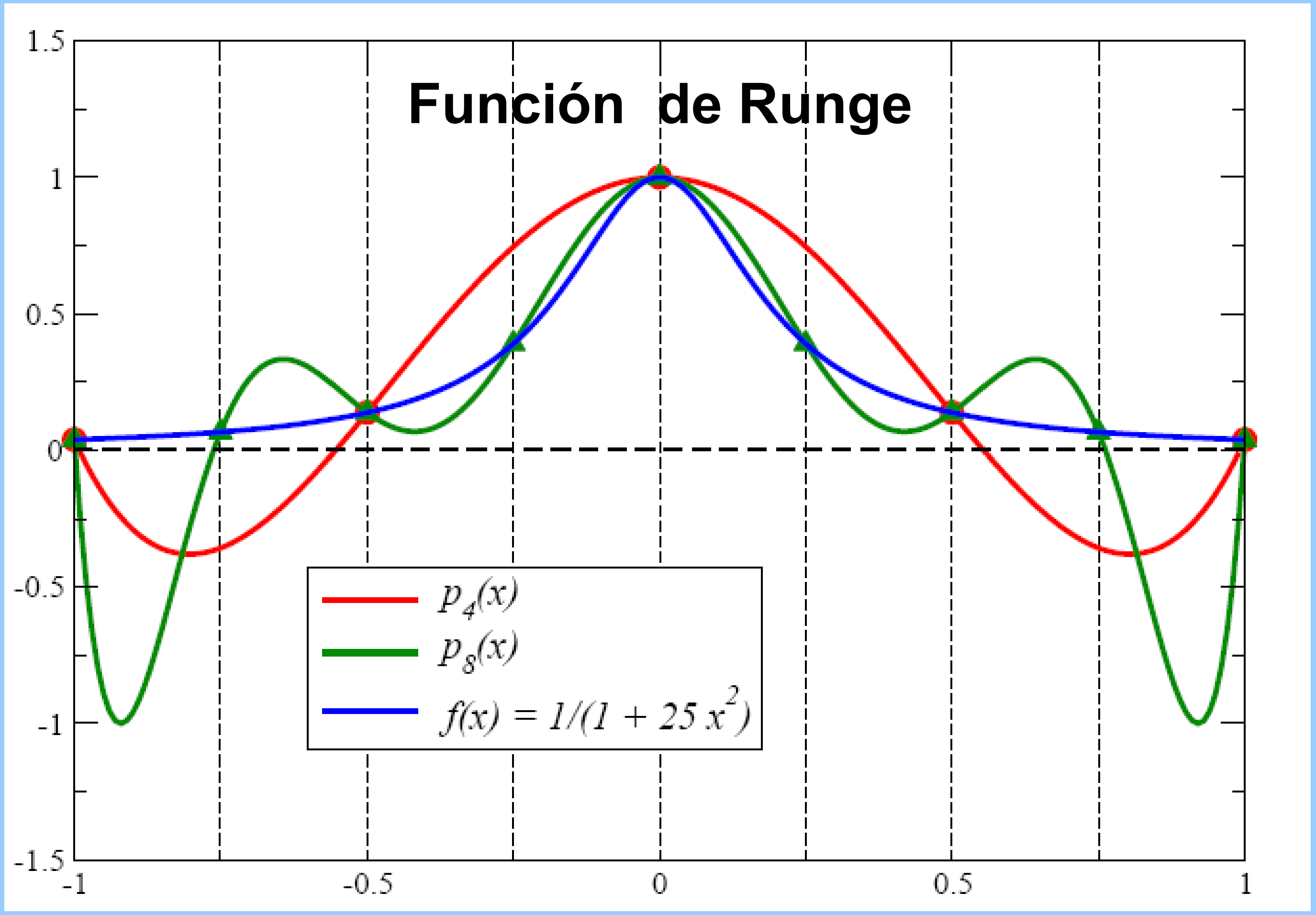
$$
\begin{aligned}
p_4(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 \\
&= \alpha_1 + x\left(\alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x^3\right) \\
&= \alpha_1 + x\left(\alpha_2 + x\left(\alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2\right)\right) \\
&= \alpha_1 + x\left(\alpha_2 + x\left(\alpha_3 + x\left(\alpha_4 + \alpha_5 x\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

4 sumas + 10 productos

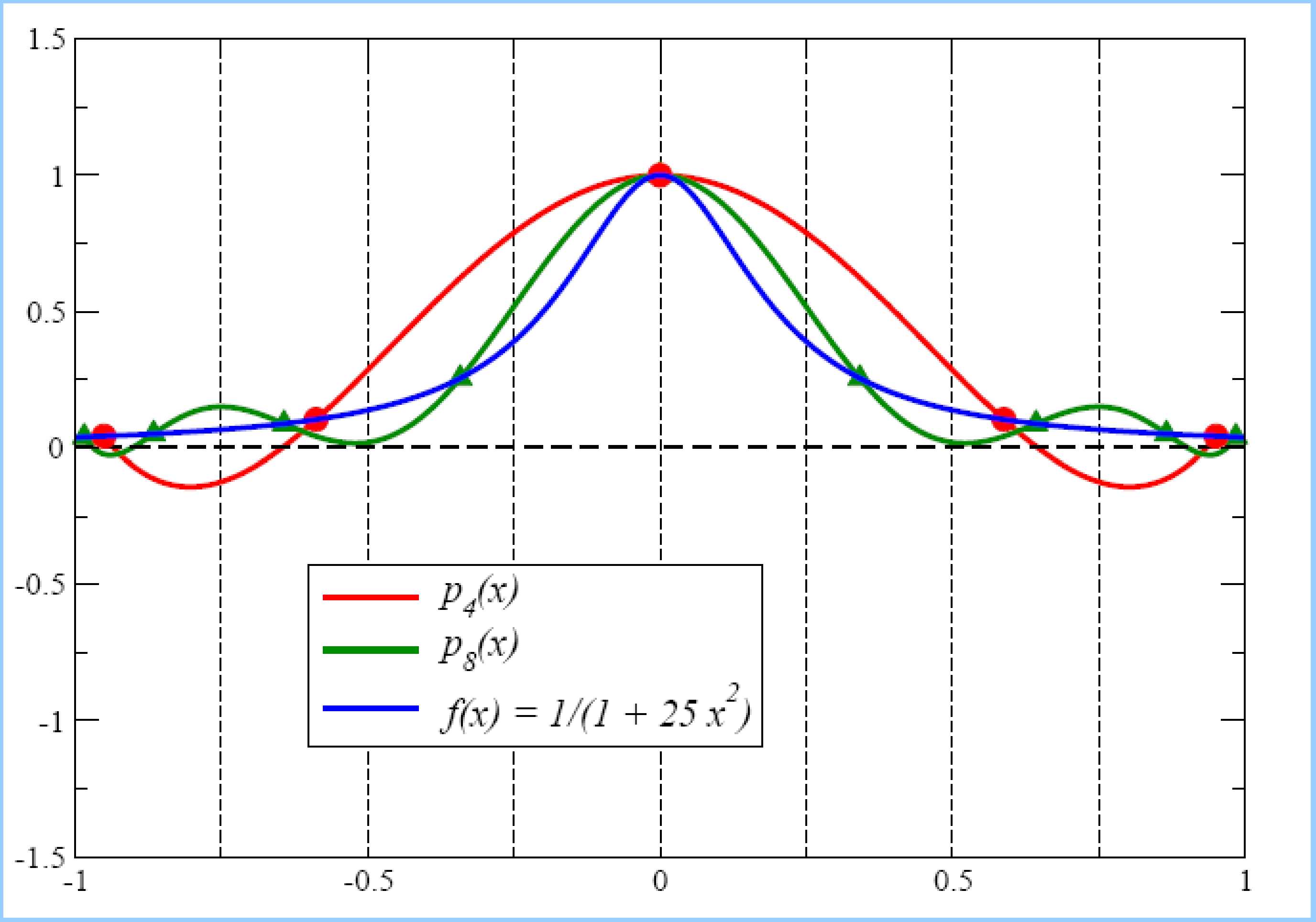
4 sumas + 4 productos



Interpolación Polinómica



Interpolación Polinómica



Interpolación Polinómica

Interpolación con polinomios de alto grado

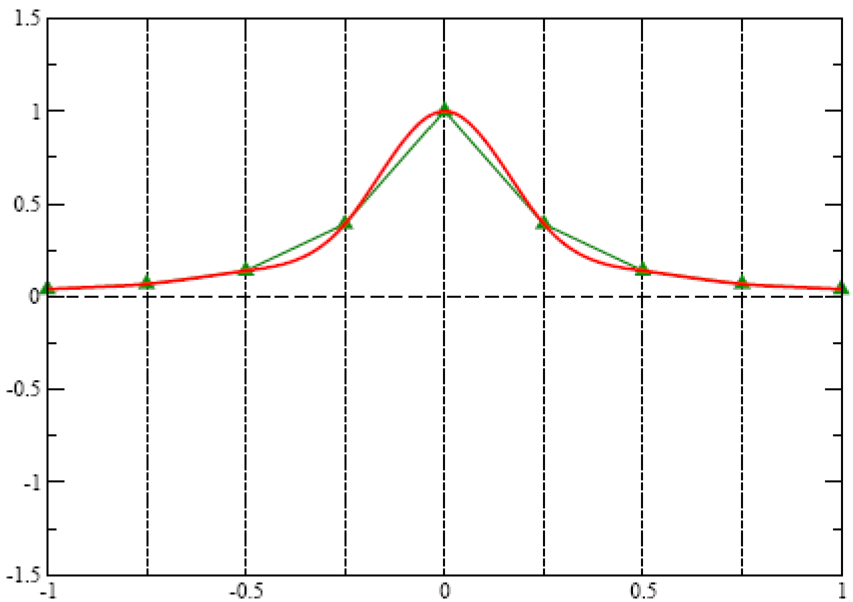
- ✔ Son muy costosos de evaluar.
- ✔ En algunas bases los coeficientes son muy dificiles de obtener (base monomial).
- ✔ El polinomio pasa por los datos, pero tiene grandes oscilaciones que no necesariamente reflejan el comportamiento de los datos.
- ✔ Si los datos son equiespaciados tiene problemas en los extremos del intervalo.
- ✔ La interpolación polinómica no necesariamente converge a la función continua que queremos representar cuando aumenta el orden del polinomio.

Interpolación Polinómica

Interpolación por Intervalos

En vez de interpolar con un único polinomio, interpolamos entre cada par de datos con un polinomio de menor grado. Los polinomios usados entre cada par de datos son entonces diferentes.

- ✔ Cada punto donde cambia el polinomio interpolante se denomina nudo (knot).
- ✔ El caso más simple es unir los datos por rectas (curva verde).
- ✔ Los polinomios por intervalo eliminan las oscilaciones, pero pareciera que la función resultante no es suave.
- ✔ Tenemos que imponer condiciones adicionales para asegurar la suavidad de una función que se armó por pedazos.



Interpolación Polinómica

Condiciones Adicionales

- ✔ Función y derivada primera continua: Hermite
- ✔ Función interpolante es polinomio de grado k con k-1 derivadas continuas: Splines

Splines Cúbicos

Ejemplificamos con tres puntos: (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)

$$
\begin{array}{lcl}
(x_1, x_2) & \longrightarrow & p_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 + \alpha_4\, x^3 \\
(x_2, x_3) & \longrightarrow & p_2(x) = \beta_1 + \beta_2\, x + \beta_3\, x^2 + \beta_4\, x^3
\end{array}
$$

Interpolación Polinómica

1) Continuidad de la función

$$
\begin{aligned}
p_1(x_1) &= \alpha_1 + \alpha_2\, x_1 + \alpha_3\, x_1^2 + \alpha_4\, x_1^3 &= y_1 \\
p_1(x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_2^2 + \alpha_4\, x_2^3 &= y_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2(x_2) &= \beta_1 + \beta_2\, x_2 + \beta_3\, x_2^2 + \beta_4\, x_2^3 &= y_2 \\
p_2(x_3) &= \beta_1 + \beta_2\, x_3 + \beta_3\, x_3^2 + \beta_4\, x_3^3 &= y_3
\end{aligned}
$$

2) Continuidad de la derivada primera en x_2

$$\alpha_2 + 2\alpha_3\, x_2 + 3\alpha_4\, x_2^2 = \beta_2 + 2\beta_3\, x_2 + 3\beta_4\, x_2^2$$

3) Continuidad de la derivada segunda en x_2

$$2\alpha_3 + 6\alpha_4\, x_2 = 2\beta_3 + 6\beta_4\, x_2$$

Tenemos 6 ecuaciones con 8 incógnitas

Interpolación Polinómica

Necesitamos 2 ecuaciones más !

Posibilidades

- ✔ Especificar la derivada primera en los extremos (si la conocemos).
- ✔ Hacer nula la derivada segunda en los extremos (spline natural).
- ✔ Si la función es periódica imponer la continuidad de las derivadas primera y segunda en los extremos.

Spline Natural: $2\alpha_3 + 6\alpha_4\, x_1 = 0$

$$2\beta_3 + 6\beta_4\, x_3 = 0$$

Interpolación Polinómica

Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales que parece muy complicado. Sin embargo la matriz de coeficientes resulta ser tridiagonal.

¿ Que ganamos ?

- ✔ Tenemos que resolver un sistema de ecuaciones para el cual hay algorítmos muy robustos.
- ✔ Calculamos los coeficientes una sola vez.
- ✔ En forma adicional obtenemos el valor de la derivada en todos los puntos

Interpolación Polinómica