Auxiliar 2: Elementos de Álgebra

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Ernesto Araya V.

22 de Agosto de 2008

P1. *a*) Sea G un grupo, $Z = Z(G)$. Probar que

$$G/Z \text{ es cíclico } \Rightarrow G \text{ es abeliano.}$$

b) Probar que todo grupo de orden 15 es cíclico.

P2. *a*) Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Sea S el conjunto de co-conjuntos de H en G. Para cada $x \in G$, sea $T_x : S \to S$ el mapeo que a cada co-conjunto yH le asocia el co-conjunto xyH. Probar que T_x es una permutación de S, y que el mapeo $x \mapsto T_x$ es un homomorfismo

$$T : G \to Perm(S).$$

b) Sea H un subgrupo de G, de índice finito n. Sea S el conjunto de co-conjuntos de H. Sea

$$T : x \mapsto T_x$$

el homomorfismo de $G \to Perm(S)$ descrito en el ejercicio precedente. Sea K el kernel de este homomorfismo. Probar que:

1) K está contenido en H.
2) $|G/K|$ divide a $n!$.
3) Si H es de índice 2, entonces H es normal, y de hecho, $H = K$.

c) Sea G un grupo finito y sea p el menor número primo que divide el orden de G. Sea H un subgrupo de índice p. Probar que H es normal en G.