PAUTA CONTROL 3 MA 26A, 2004/1
Profs. Jaime Ortega y Salomé Martínez
Prof. Aux. Nicolás Carreño
Tiempo: 3 hrs.

(1) Considere la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

(a) Demuestre que $A^3 = 0$.

Sol: Calculemos A^2 y A^3 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

(b) Determine la matriz e^{At}.

Sol: Por definición de e^{At} :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3t+1 & 0 & -3t \\ 18t^2+5t & 1 & 7t-18t^2 \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix}$$

$\square$

(c) Encuentre la solución general del sistema

$$x'(t) = Ax + f(t),$$

donde

$$f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Sol: La solución general del sistema viene dada por (suponiendo $t_0 = 0$):

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds.$$

Calculemos el término de la integral:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{-As} f(s)ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} 3t+1 & 0 & -3t \\ 18t^2+5t & 1 & 7t-18t^2 \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^s \\ s \\ e^s \end{pmatrix} \\
&= \int_0^t \begin{pmatrix} e^s \\ -12se^s + s \\ s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ -12(te^t - e^t + 1) + t^2/2 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así, tenemos todos los elementos para escribir la solución

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} 3t+1 & 0 & -3t \\ 18t^2+5t & 1 & 7t-18t^2 \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3t+1 & 0 & -3t \\ 18t^2+5t & 1 & 7t-18t^2 \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ -12(te^t - e^t + 1) + t^2/2 \\ e^t - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3t+1 & 0 & -3t \\ 18t^2+5t & 1 & 7t-18t^2 \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 12e^t - 12(t+1) + t^2/2 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

(2) Sea $A \in \mathbb{R}^N$ una matriz diagonalizable con valores propios negativos $-\omega_1^2, ..., -\omega_N^2$, con $\omega_i > 0$ para $i = 1, ..., N$. Denotamos por $v_1, ..., v_N$ sus correspondientes vectores propios, es decir $Av_i = -\omega_i^2 v_i$ para $i = 1, ..., N$.

(a) Demuestre que $x_i(t) = v_i \cos \omega_i t$, $y_i(t) = v_i \operatorname{sen} \omega_i t$, con $i = 1, ..., N$, son soluciones del sistema

$$(1) \quad x'' = Ax.$$

Sol: Notemos que para $i = 1, \ldots, N$

$$
\begin{aligned}
x_i(t) &= v_i \cos w_i t \\
x_i'(t) &= -w_i v_i \sin w_i t \\
x_i''(t) &= -w_i^2 v_i \cos w_i t
\end{aligned}
$$

de donde

$$x_i''(t) = \underbrace{-w_i^2 v_i}_{Av_i} \cos w_i t = A(v_i \cos w_i t) = Ax_i(t).$$

Para $y_i(t)$ es análogo.

□

(b) Demuestre que las soluciones $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N$ son linealmente independientes. Ind.: Si $\sum_{i=1}^N [\lambda_i x_i(t) + \mu_i y_i(t)] = 0$ para todo t, entonces también se tiene que $\sum_{i=1}^N [\lambda_i x_i'(t) + \mu_i y_i'(t)] = 0$ para todo t. Evalue en un t apropiado para obtener el resultado.

Sol: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \mu_1 \ldots, \mu_N \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^N [\lambda_i x_i(t) + \mu_i y_i(t)] = 0$$

<u>pdq:</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \mu_1 \ldots, \mu_N = 0$.
Notemos que evaluando en $t = 0$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i = 0$$

Por la independencia lineal de $v_1 \ldots, v_N$ se concluye que $\lambda_1, \ldots, \lambda_N = 0$.
Usando la indicación y lo que acabamos de probar:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \mu_i y_i'(t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \mu_i w_i v_i \cos w_i t &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando esto último en $t = 0$:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i w_i v_i = 0$$

de donde $\mu_1 w_1, \ldots, \mu_N w_N = 0$. Como $w_i > 0$, se concluye que $\mu_1, \ldots, \mu_N = 0$.

$\square$

(c) Determine la solución general del sistema

$$x'' = -6x - 5y, \quad y'' = 3x + 2y.$$

Sol: Tenemos el sistema de segundo orden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Siguiendo la parte (a), necesitamos los valores y vectores propios para construir las soluciones. Se puede calcular fácilmente que los valores propios de la matriz A en este caso son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$, y que los vectores propios asociados son, respectivamente,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la notación de la pregunta,

$$w_1 = 1, w_2 = \sqrt{3},$$

con lo que podemos escribir la solución general como

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cos \sqrt{3}t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t + c_4 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \sin \sqrt{3}t.$$

$\square$

(3) (a) Considere el sistema lineal

$$x' = ax - y, \quad y' = x + ay.$$

Bosqueje el diagrama de fase y clasifique el punto de equilibrio $(0,0)$ cuando: $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$.

Sol: Busquemos los valores propios de la matriz del sistema, es decir, de

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

$$(a-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2a + -\sqrt{4a^2 - 4(a^2+1)}}{2} = a + -i$$

de donde se puede clasificar fácilmente el punto de equilibrio:

<u>$a > 0$:</u> Espiral inestable. Para ver el sentido de giro, podemos evaluar en el sistema en un punto $(\epsilon, 0)$, con $\epsilon > 0$, y ver que $y' = \epsilon > 0$. Esto dice que el sentido es anti-horario.

<u>$a = 0$:</u> Centro. El sentido se busca igual que antes, resultando ser anti-horario.

<u>$a < 0$:</u> Espiral asintóticamente estable. Al igual que los casos anteriores, el sentido de giro es anti-horario.

□

(b) Considere el sistema

$$x' = -x + \operatorname{sen} y, \quad y' = 2x.$$

Determine todos los equilibrios de este sistema. Clasifique cada equlibrio de acuerdo a la clasificación vista en clases.

Sol: Busquemos los puntos que cumplan que $x' = 0, y' = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} -x + \sin y &= 0 \\ 2x &= 0 \end{aligned}$$

Podemos ver que se debe cumplir que $x = 0$ y $\sin y = 0$. Esto último ocurre cuando $y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$. Así, los puntos de equilibrio son $(0, n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$.

Para clasificarlos, necesitamos linealizar en torno al punto. Para eso, calculemos el Jacobiano y evaluamos en los puntos de equilibrio, para luego calcular sus valores propios.

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & \cos y \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(0,n\pi) = \begin{bmatrix} -1 & (-1)^n \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Distinguimos dos casos:

<u>n par:</u>

$$J(0,n\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores propios: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$. Los puntos de la forma $(0, 2m\pi) \quad m \in \mathbb{Z}$, corresponden a puntos silla.

<u>n impar:</u>

$$J(0, n\pi) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores propios: $\lambda = -\frac{1}{2} + -i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Los puntos de la forma $(0, (2m + 1)\pi) \quad m \in \mathbb{Z}$, son espirales asintóticamente estables. El sentido de giro es antihorario.

$\square$