

minuto. Si la cantidad máxima de sal en el tanque se obtiene a los 20 minutos. Cual era la cantidad de sal inicial en el tanque?

(Rta.: 375 libras)

Ejercicio 10. Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gr/litro. El tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 litros/min. y la solución bien homogénizada sale con la misma rapidez. Encuentre el tiempo que transcurrirá hasta que la concentración del colorante en el tanque alcance el 1 % de su valor original.

(Rta.: 460.5 min.)

3.4. VACIADO DE TANQUES

Un tanque de una cierta forma geométrica está inicialmente lleno de agua hasta una altura H . El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área es A pie². Se abre el orificio y el líquido cae libremente. La razón volumétrica de salida $\frac{dQ}{dt}$ es proporcional a la velocidad de salida y al área del orificio, es decir,

$$\frac{dQ}{dt} = -kAv,$$

aplicando la ecuación de energía: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

donde $g = 32 \text{ pie/seg}^2 = 9,81 \text{ mt./seg}^2$

La constante k depende de la forma del orificio:

- Si el orificio es de forma rectangular, la constante $k = 0,8$.
- Si el orificio es de forma triangular, la constante $0,65 \leq k \leq 0,75$.
- Si el orificio es de forma circular, la constante $k = 0,6$.

Caso 1. Cilindro circular de altura H_0 pie y radio r pie, dispuesto en forma vertical y con un orificio circular de diámetro ϕ'' (pulgadas) (Ver figura 3.7).

3.4. VACIADO DE TANQUES

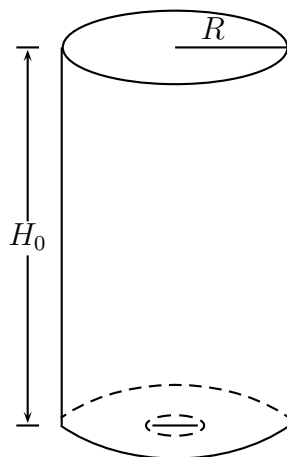


Figura 3.7

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -0,6\pi \left(\frac{\phi}{24}\right)^2 \sqrt{2 \times 32 \times h} = -4,8\pi \frac{\phi^2}{576} \sqrt{h} \quad (3.5)$$

pero

$$dQ = \pi r^2 dh \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad (3.6)$$

Como (3.5) = (3.6): $\pi r^2 \frac{dh}{dt} = -\frac{4,8\pi}{576} \phi^2 \sqrt{h}$

y separando variables:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{4,8}{576r^2} \phi^2 dt$$

$$h^{-\frac{1}{2}} dh = -\frac{4,8}{576r^2} \phi^2 dt$$

e integrando: $2\sqrt{h} = -\frac{4,8}{576r^2} \phi^2 t + C.$

Con las condiciones iniciales: $t = 0, h = H_0$, hallamos la constante C .

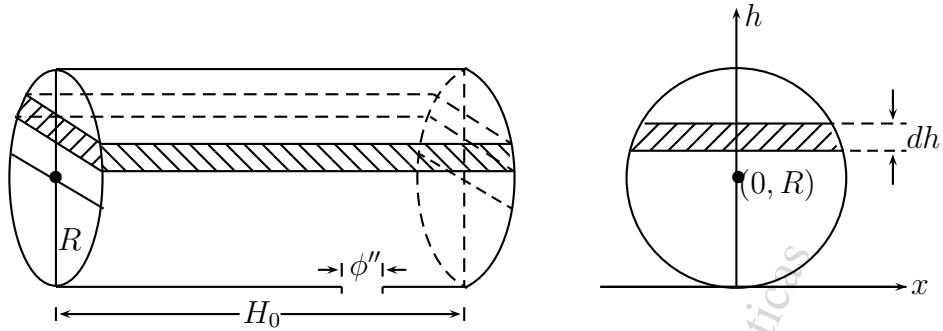


Figura 3.8

El tiempo de vaciado (t_v): se obtiene cuando $h = 0$. Hallar t_v

Caso 2. El mismo cilindro anterior pero dispuesto horizontalmente y con el orificio en el fondo (Ver figura 3.8).

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -\frac{4,8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \quad (3.7)$$

pero de la figura 3.8, tenemos:

$$dQ = 2x \times H_0 \times dh$$

y también

$$(x - 0)^2 + (h - r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + h^2 - 2rh + r^2 = r^2$$

luego

$$x = \sqrt{2rh - h^2}$$

sustituyendo

$$dQ = 2\sqrt{2rh - h^2} H_0 dh$$

3.4. VACIADO DE TANQUES

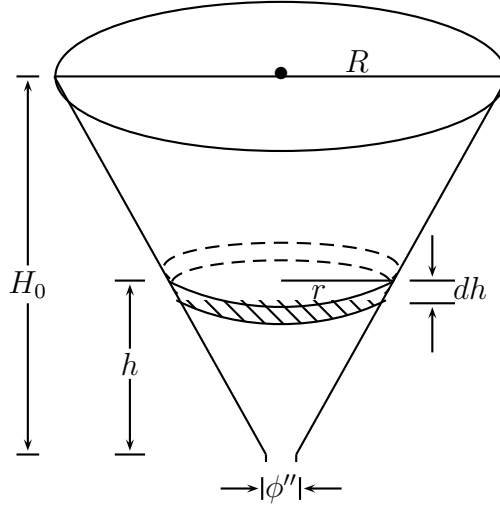


Figura 3.9

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 2H_0 \sqrt{2rh - h^2} \frac{dh}{dt} \quad (3.8)$$

(3.8) = (3.7):

$$\begin{aligned} 2H_0 \sqrt{2rh - h^2} \frac{dh}{dt} &= -\frac{4,8\pi\phi^2}{576} \sqrt{h} \\ 2H_0 \sqrt{h} \sqrt{2r - h} \frac{dh}{dt} &= -\frac{4,8\pi\phi^2}{576} \sqrt{h}, \text{ donde } h \neq 0 \\ \sqrt{2r - h} dh &= -\frac{4,8\pi\phi^2}{2 \times 576 H_0} dt \end{aligned}$$

condiciones iniciales:

en $t_0 = 0$ $h = 2r$, con ella hallo constante de integración.

El tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$. Hallar t_v .

Caso 3. Un cono circular recto de altura H_0 y radio R dispuesto verticalmente con orificio circular en el fondo de diámetro ϕ'' (Ver figura 3.9).

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -0,6\pi \left(\frac{\phi''}{24}\right)^2 \sqrt{2 \times 32h}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{4,8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \quad (3.9)$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{R}{r} = \frac{H_0}{h} \Rightarrow r = \frac{Rh}{H_0} \quad (3.10)$$

y como $dQ = \pi r^2 dh$ entonces, sustituyendo (3.10): $dQ = \pi \frac{R^2 h^2}{H_0^2} dh$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\pi R^2}{H_0^2} h^2 \frac{dh}{dt} \quad (3.11)$$

$$(3.9) = (3.11): \frac{\pi R^2}{H_0^2} h^2 \frac{dh}{dt} = -\frac{4,8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}$$

$$\Rightarrow h^{\frac{3}{2}} \frac{dh}{dt} = -\frac{4,8\phi^2 H_0^2}{576R^2}$$

Condiciones iniciales: cuando $t = 0$, $h = H_0$

El tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$. Hallar t_v .

Ejercicio 1. Un tanque semiesférico tiene un radio de 1 pie; el tanque está inicialmente lleno de agua y en el fondo tiene un orificio de 1 pulg. de diámetro. Calcular el tiempo de vaciado.

(Rta.: 112 seg.)

Ejercicio 2. Un cono circular recto de radio R y altura H tiene su vértice hacia abajo. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área A es controlada por una válvula y es proporcional a la altura del agua en cada instante. Suponiendo que el tanque está lleno de agua, calcular el tiempo de vaciado. Del tiempo de vaciado, ¿qué porcentaje es requerido para vaciar la mitad del volumen?

(Rta.: el porcentaje requerido para bajar la mitad del volumen es 29,3 %)

Ejercicio 3. Un tanque cúbico de lado 4 pies, está lleno de agua, la cual sale por una hendidura vertical de $\frac{1}{8}$ pulg. de ancho y de 4 pies de alto. Encontrar el tiempo para que la superficie baje 3 pies. (Ayuda: encontrar el número de pies cúbicos por segundo de agua que salen de la hendidura cuando el agua tiene h pies de profundidad).