Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(Métodos de Solución)

Julio López
jclopez@dim.uchile.cl

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Primavera 2008, Clase 3

1) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c).$$

Cambio de variable: $z = ax + by + c$

$$z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

Así:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z) \quad \leftarrow \text{variable separable.}$$

Ejemplos:

1) $y' - e^x e^y = -1$

2) $y' = 3y - x$

1) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c).$$

Cambio de variable: $z = ax + by + c$

$$z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

Así:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z) \quad \leftarrow \text{variable separable.}$$

Ejemplos:

1) $y' - e^x e^y = -1$

2) $y' = 3y - x$

Ecuaciones que se Reducen a Variables Separables

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice **homogénea de grado** $k \in \mathbb{N}_0$ si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y), \quad \forall \lambda.$$

Ejemplos:

1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ homogénea grado 2

2) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ homogénea grado 0.

Definición

Una E.D de la forma $y' = f(x,y)$ se llama **homogénea** si f es homogénea de grado 0.

2) Obs.: La **ecuación homogénea** siempre se puede representar en la forma:

$$y' = \varphi(y/x)$$

Cambio de variable: $z = y/x$ ($\Rightarrow \ y = xz$)

$$y' = xz' + z \Leftrightarrow xz' + z = \varphi(z) \Leftrightarrow z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}$$

Ejemplos:

1) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

Solución (2):

$$y' = \sqrt{1 - (y/x)^2} + y/x$$

Hacer $y = zx$:

$$xz' = \sqrt{1 - z^2} \Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x}$$

Solución cte: $\sqrt{1 - z^2} = 0 \Rightarrow z = \pm 1$ ($\Rightarrow y = \pm x$) $\leftarrow$ Sol. particular

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \text{arcsen}(z) = \ln(|x|) + \ln(c_1) = \ln(cx).$$

Obs. $|\ln(cx)| \leq \pi/2 \Leftrightarrow e^{-\pi/2} \leq cx \leq e^{\pi/2}$.
Así,

$$z = \text{sen}(\ln(cx)) \Rightarrow y = x\text{sen}(\ln(cx)).$$

Las soluciones $y = \pm x$ son singulares.

3) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

3) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

3) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
   Cambio de Variable: $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$. Así
   $$\underbrace{\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)}_{\text{ec. homogénea}}.$$
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que
   $$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

3) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

Cambio de Variable: $z = a_1x + b_1y \Rightarrow z' = a_1 + b_1y'$

$$\underbrace{z' = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right)}_{\text{ec. variable separable}}$$

Ejemplo 1: $y' = \dfrac{-2x+4y-6}{x+y-3}$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+4y-6 & = & 0 \\ x+y-3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{sol. única } (x_0,y_0)=(1,2).$$

Cambio de Variable: $\xi = x-1$, $\eta = y-2$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-2\xi+4\eta}{\xi+\eta} = \frac{-2+4\eta/\xi}{1+\eta/\xi}$$

Cambio de Variable: $z=\eta/\xi$ $(\Rightarrow \eta' = z+\xi z')$. Así

$$z+\xi z' = \frac{-2+4z}{1+z} \Leftrightarrow -\xi z' = \frac{z^2-3z+2}{z+1}$$

Ejemplo 2: $y' = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$

Solución: Las rectas son paralelas ¿Porque?

Cambio de Variable: $z = x + y$

$$z' = -\frac{z+1}{2z-1} + 1 = \frac{z-2}{2z-1}$$

- Sol. cte: $z = 2 \Rightarrow y + x = 2 \leftarrow$ sol. particular EDO
- Suponer $z \neq 0$:

$$\int \left(2 + \frac{3}{z-2}\right) dz = \int dx + c \Leftrightarrow 2z + 3\ln(z-2) = x + c$$

$$x + 2y + 3\ln(x + y - 2) = c.$$

- $y = 2 - x$ es solución singular.

4) Ecuaciones del tipo:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas de grado n.

Sea $F(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$. Es claro que F es homogénea de grado 0. Entonces,

$$F(x, y) = F(x, xy/x) = x^0 F(1, y/x) = F(1, y/x)$$

tiene la forma (2).

Ejemplo: $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} M(x, y) & = & x + ye^{y/x} \\ N(x, y) & = & -xe^{y/x} \end{array}\right\} \text{homogéneas grado 1}$$

Cambio variable: $y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$

$$dx - xe^z dz = 0 \Rightarrow \ln(cx) = e^z = e^{y/x}.$$

4) Ecuaciones del tipo:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas de grado n.

Sea $F(x,y) = -M(x,y)/N(x,y)$. Es claro que F es homogénea de grado 0. Entonces,

$$F(x,y) = F(x, xy/x) = x^0 F(1, y/x) = F(1, y/x)$$

tiene la forma (2).

Ejemplo: $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} M(x,y) & = & x + ye^{y/x} \\ N(x,y) & = & -xe^{y/x} \end{array}\right\} \text{homogéneas grado 1}$$

Cambio variable: $y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$

$$dx - xe^z dz = 0 \Rightarrow \ln(cx) = e^z = e^{y/x}.$$

4) Ecuaciones del tipo:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas de grado n.

Sea $F(x,y) = -M(x,y)/N(x,y)$. Es claro que F es homogénea de grado 0. Entonces,

$$F(x,y) = F(x, xy/x) = x^0 F(1, y/x) = F(1, y/x)$$

tiene la forma (2).

Ejemplo: $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} M(x,y) & = & x + ye^{y/x} \\ N(x,y) & = & -xe^{y/x} \end{array}\right\} \text{homogéneas grado 1}$$

Cambio variable: $y = zx \Rightarrow dy = zdx + xdz$

$$dx - xe^z dz = 0 \Rightarrow \ln(cx) = e^z = e^{y/x}.$$

Ejemplo (1): $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$
$M(x,y) = 2xy^3 \leftarrow$ homogénea grado 4
$N(x,y) = x^2y^2 - 1 \leftarrow$ no homogénea (por el 1).

Ejemplo (2): $y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{\sqrt{x}}{y^2} = \dfrac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$
$M(x,y) = y^3 - 6x^{3/2} \leftarrow$ no homogénea (por término $x^{3/2}$)
$N(x,y) = 2xy^2 \leftarrow$ homogénea grado 3

¿Que hacer en estos casos?
Rpta: Hacer cambio variable $y = z^\alpha$, donde debemos encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tq la E.D sea homogénea.

$$y' = \alpha z^{\alpha-1}z' \quad \text{ó} \quad dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$$

Ejemplo (1): $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$
$M(x, y) = 2xy^3 \leftarrow$ homogénea grado 4
$N(x, y) = x^2y^2 - 1 \leftarrow$ no homogénea (por el 1).

Ejemplo (2): $y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2} = \frac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$
$M(x, y) = y^3 - 6x^{3/2} \leftarrow$ no homogénea (por término $x^{3/2}$)
$N(x, y) = 2xy^2 \leftarrow$ homogénea grado 3

¿Que hacer en estos casos?
Rpta: Hacer cambio variable $y = z^\alpha$, donde debemos encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tq la E.D sea homogénea.

$$y' = \alpha z^{\alpha-1}z' \quad \text{ó} \quad dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$$

Ejemplo (1): $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$
$M(x, y) = 2xy^3$ $\leftarrow$ homogénea grado 4
$N(x, y) = x^2y^2 - 1$ $\leftarrow$ no homogénea (por el 1).

Ejemplo (2): $y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{\sqrt{x}}{y^2} = \dfrac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$
$M(x, y) = y^3 - 6x^{3/2}$ $\leftarrow$ no homogénea (por término $x^{3/2}$)
$N(x, y) = 2xy^2$ $\leftarrow$ homogénea grado 3

¿Que hacer en estos casos?
Rpta: Hacer cambio variable $y = z^\alpha$, donde debemos encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tq la E.D sea homogénea.

$$y' = \alpha z^{\alpha-1}z' \quad \text{ó} \quad dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$$

Ejemplo (1) (continuación): $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$

$$\Rightarrow \alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0$$

grado de $x^2z^{3\alpha-1}$: $3\alpha+1$
grado de $z^{\alpha-1}$: $\alpha-1$
grado de $xz^{3\alpha}$: $3\alpha+1$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $3\alpha+1=\alpha-1 \Rightarrow$Así, $\alpha=-1$

$y=1/z$. Luego

$$(\frac{1}{z^2}-\frac{x^2}{z^4})dz+\frac{2x}{z^3}dx=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2-x^2)dz+2xzdx=0$$

Cambio variable: $z=ux \Rightarrow dz=udx+xdu$

$$u(u^2+1)dx+x(u^2-1)du=0 \ \ldots$$

Ejemplo (1) (continuación): $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3 dx = 0$

$$\Rightarrow \alpha(x^2 z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})dz + 2xz^{3\alpha} dx = 0$$

grado de $x^2 z^{3\alpha-1}$: $3\alpha + 1$
grado de $z^{\alpha-1}$: $\alpha - 1$
grado de $xz^{3\alpha}$: $3\alpha + 1$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $3\alpha + 1 = \alpha - 1 \Rightarrow$ Así, $\alpha = -1$

$y = 1/z$. Luego

$$(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4})dz + \frac{2x}{z^3} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - x^2)dz + 2xzdx = 0$$

Cambio variable: $z = ux \Rightarrow dz = udx + xdu$

$$u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0 \ \ldots$$

Ejemplo (1) (continuación): $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$

$$\Rightarrow \alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0$$

grado de $x^2z^{3\alpha-1}$: $3\alpha+1$
grado de $z^{\alpha-1}$: $\alpha-1$
grado de $xz^{3\alpha}$: $3\alpha+1$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $3\alpha+1=\alpha-1 \Rightarrow$ Así, $\alpha=-1$

$y=1/z$. Luego

$$(\frac{1}{z^2}-\frac{x^2}{z^4})dz+\frac{2x}{z^3}dx=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2-x^2)dz+2xzdx=0$$

Cambio variable: $z=ux \Rightarrow dz=udx+xdu$

$$u(u^2+1)dx+x(u^2-1)du=0 \ \ldots$$

Ejemplo (1) (continuación): $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$

$$\Rightarrow \alpha(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

grado de $x^2z^{3\alpha-1}$: $3\alpha + 1$
grado de $z^{\alpha-1}$: $\alpha - 1$
grado de $xz^{3\alpha}$: $3\alpha + 1$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $3\alpha + 1 = \alpha - 1$ $\Rightarrow$Así, $\alpha = -1$

$y = 1/z$. Luego

$$(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4})dz + \frac{2x}{z^3}dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - x^2)dz + 2xzdx = 0$$

Cambio variable: $z = ux \Rightarrow dz = udx + xdu$

$$u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0 \ \ldots$$

Ejemplo (2) (continuación): $y' = \dfrac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$

$$\Rightarrow \alpha z' = \frac{z^{3\alpha} - 6x^{3/2}}{2xz^{3\alpha-1}}$$

grado de $z^{3\alpha}$: 3α
grado de $xz^{3\alpha-1}$: 3α
grado de $x^{3/2}$: $3/2$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $\alpha = 1/2$.

Así, $y = \sqrt{z}$. Luego

$$z' = \frac{z^{3/2} - 6x^{3/2}}{2xz^{1/2}} = \frac{z}{x} - 6\left(\frac{x}{z}\right)^{1/2}$$

cambio variable: $z = ux$ ($\Rightarrow z' = u'x + u$)

$$u'x = \frac{-6}{\sqrt{u}} \Rightarrow u^{3/2} = -9\ln(x/c) \ \ldots$$

Ejemplo (2) (continuación): $y' = \dfrac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$

$$\Rightarrow \alpha z' = \frac{z^{3\alpha} - 6x^{3/2}}{2xz^{3\alpha-1}}$$

grado de $z^{3\alpha}$: 3α
grado de $xz^{3\alpha-1}$: 3α
grado de $x^{3/2}$: $3/2$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $\alpha = 1/2$.

Así, $y = \sqrt{z}$. Luego

$$z' = \frac{z^{3/2} - 6x^{3/2}}{2xz^{1/2}} = \frac{z}{x} - 6\left(\frac{x}{z}\right)^{1/2}$$

cambio variable: $z = ux$ $(\Rightarrow z' = u'x + u)$

$$u'x = \frac{-6}{\sqrt{u}} \Rightarrow u^{3/2} = -9\ln(x/c) \ \ldots$$

Ejemplo (2) (continuación): $y' = \dfrac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$

$$\Rightarrow \alpha z' = \frac{z^{3\alpha} - 6x^{3/2}}{2xz^{3\alpha-1}}$$

grado de $z^{3\alpha}$: 3α
grado de $xz^{3\alpha-1}$: 3α
grado de $x^{3/2}$: $3/2$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $\alpha = 1/2$.

Así, $y = \sqrt{z}$. Luego

$$z' = \frac{z^{3/2} - 6x^{3/2}}{2xz^{1/2}} = \frac{z}{x} - 6\left(\frac{x}{z}\right)^{1/2}$$

<u>cambio variable:</u> $z = ux$ $(\Rightarrow z' = u'x + u)$

$$u'x = \frac{-6}{\sqrt{u}} \Rightarrow u^{3/2} = -9\ln(x/c) \ \ldots$$

Definición

Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El **diferencial total** de $u = u(x, y)$ es definido como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Consideremos la E.D de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (1)$$

¿A partir de (1) podemos obtener una familia de curvas que describe la relación entre x e y?

Definición

Diremos que la E.D. (1) es **exacta** en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si existe una función $u = u(x, y)$ tq

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \;\text{ y }\; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Definición

Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El **diferencial total** de $u = u(x, y)$ es definido como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Consideremos la E.D de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1}$$

¿A partir de (1) podemos obtener una familia de curvas que describe la relación entre x e y?

Definición

Diremos que la E.D. (1) es **exacta** en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si existe una función $u = u(x, y)$ tq

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definición

Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El **diferencial total** de $u = u(x, y)$ es definido como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Consideremos la E.D de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1}$$

¿A partir de (1) podemos obtener una familia de curvas que describe la relación entre x e y?

Definición

Diremos que la E.D. (1) es **exacta** en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si existe una función $u = u(x, y)$ tq

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

En tal caso

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

entonces (1) es equiv. a: $du = 0$.
Luego,

$$y = y(x),\ x \in I \text{ es solución de (1) sii } u(x, y(x)) = c,\ \forall x \in I.$$

Dado que es difícil saber si una E.D. proviene de una diferencial total, necesitamos un criterio sencillo que nos permita determinar cuando una E.D es exacta.

En tal caso

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

entonces (1) es equiv. a: $du = 0$.
Luego,

$$y = y(x),\ \ x \in I \text{ es solución de (1) sii } u(x, y(x)) = c,\ \ \forall x \in I.$$

Dado que es difícil saber si una E.D. proviene de una diferencial total, necesitamos un criterio sencillo que nos permita determinar cuando una E.D es exacta.

Teorema (Criterio para E.D. exactas)

Sean $M(x, y), N(x, y)$ funciones continuas y con derivadas continuas de primer orden en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Entonces (1) es exacta en Ω sii

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ en } \Omega.$$

Método de Solución:

Dada la ecuación (1), queremos hallar u tq $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.

1. Verificar que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ (E.D. exacta)
2. Suponer que $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ y luego integrar c/r a x, dejando y cte:
$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{2}$$
3. Derivar c/r a y la ec. (2)
$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \tag{3}$$
4. Integrar (3) c/r a y y sustituir en (2) e igualar a C.