

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Introducción)

Julio López

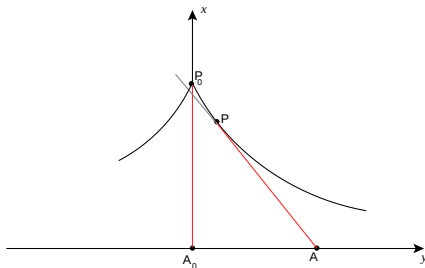
`jclopez@dim.uchile.cl`

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Primavera 2008, Clase 1

1.) Modelamiento de un problema Geométrico

Tractriz (equitangencial): Es la curva que describe un objeto arrastrado por otro, que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta.



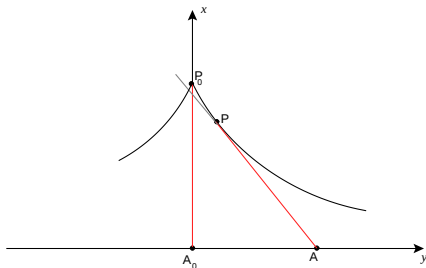
$$\triangleright P(x, y) \in \mathcal{C} \triangleright A(0, A_y)$$

$$\triangleright y'(x) = \frac{y - A_y}{x}$$

$$\triangleright d(P, A) = cte \Leftrightarrow c = x^2 + (y - A_y)^2 = x^2(1 + y'^2)$$

1.) Modelamiento de un problema Geométrico

Tractriz (equitangencial): Es la curva que describe un objeto arrastrado por otro, que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta.



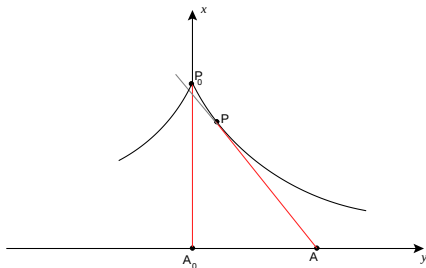
$$\triangleright P(x, y) \in \mathcal{C} \triangleright A(0, A_y)$$

$$\triangleright y'(x) = \frac{y - A_y}{x}$$

$$\triangleright d(P, A) = cte \Leftrightarrow c = x^2 + (y - A_y)^2 = x^2(1 + y'^2)$$

1.) Modelamiento de un problema Geométrico

Tractriz (equitangencial): Es la curva que describe un objeto arrastrado por otro, que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta.



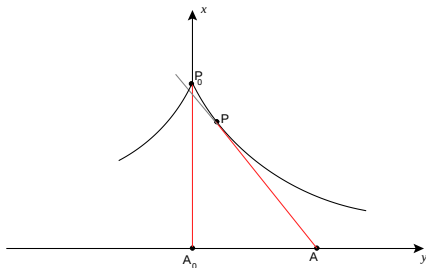
$$\triangleright P(x, y) \in \mathcal{C} \triangleright A(0, A_y)$$

$$\triangleright y'(x) = \frac{y - A_y}{x}$$

$$\triangleright d(P, A) = cte \Leftrightarrow c = x^2 + (y - A_y)^2 = x^2(1 + y'^2)$$

1.) Modelamiento de un problema Geométrico

Tractriz (equitangencial): Es la curva que describe un objeto arrastrado por otro, que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta.



$$\triangleright P(x, y) \in \mathcal{C} \triangleright A(0, A_y)$$

$$\triangleright y'(x) = \frac{y - A_y}{x}$$

$$\triangleright d(P, A) = cte \Leftrightarrow c = x^2 + (y - A_y)^2 = x^2(1 + y'^2)$$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice $(0,0)$.

$$\triangleright y' = 2ax \quad \triangleright y' = 2\frac{y}{x}$$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{\text{curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de } \mathcal{F}\}$.

$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \Rightarrow \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c}}_{\text{familia elipses}} = 1$$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice $(0,0)$.

$\triangleright y' = 2ax \quad \triangleright y' = 2\frac{y}{x}$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{\text{curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de } \mathcal{F}\}$.

$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \Rightarrow \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c}}_{\text{familia elipses}} = 1$$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice $(0,0)$.

$\triangleright y' = 2ax \quad \triangleright y' = 2\frac{y}{x}$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{\text{curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de } \mathcal{F}\}$.

$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \Rightarrow \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c}}_{\text{familia elipses}} = 1$$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice $(0,0)$.

$\triangleright y' = 2ax \quad \triangleright y' = 2\frac{y}{x}$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{\text{curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de } \mathcal{F}\}$.

$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \Rightarrow \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c}}_{\text{familia elipses}} = 1$$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice $(0,0)$.

$\triangleright y' = 2ax \quad \triangleright y' = 2\frac{y}{x}$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{\text{curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de } \mathcal{F}\}.$

$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \Rightarrow \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c}}_{\text{familia elipses}} = 1$$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice $(0,0)$.

$$\triangleright y' = 2ax \quad \triangleright y' = 2\frac{y}{x}$$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{\text{curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de } \mathcal{F}\}$.

$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

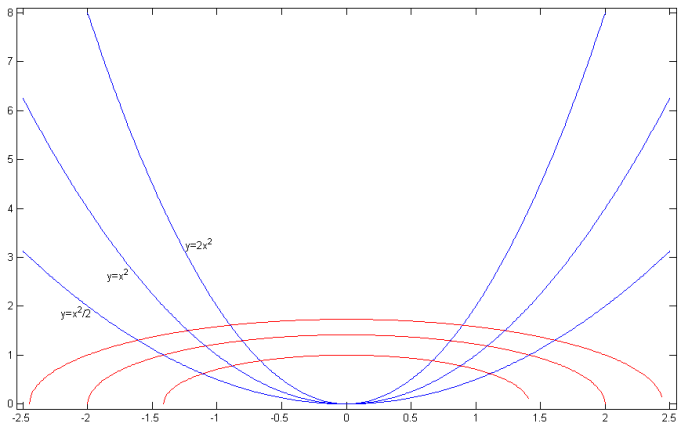
$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \Rightarrow \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c}}_{\text{familia elipses}} = 1$$

Motivación



Definiciones Básicas

Definición 1 (E.D)

Si una ecuación contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**.

Definición 2 (E.D.O)

Si la ecuación contiene derivadas con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**.

Definición 3 (E.D.P)

Si la ecuación contiene derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplos

1) $y' + 4y = 5$

2) $(x^2 - y)dx + 5 \cos(y)dy = 0$

3) $y'' + 4(y')^3 + 3y = 0$

1) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = y - x$

Definiciones Básicas

Definición 1 (E.D)

Si una ecuación contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**.

Definición 2 (E.D.O)

Si la ecuación contiene derivadas con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**.

Definición 3 (E.D.P)

Si la ecuación contiene derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplos

1) $y' + 4y = 5$

2) $(x^2 - y)dx + 5 \cos(y)dy = 0$

3) $y'' + 4(y')^3 + 3y = 0$

1) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = y - x$

Definiciones Básicas

Definición 1 (E.D)

Si una ecuación contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**.

Definición 2 (E.D.O)

Si la ecuación contiene derivadas con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**.

Definición 3 (E.D.P)

Si la ecuación contiene derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplos

$$1) y' + 4y = 5$$

$$2) (x^2 - y)dx + 5 \cos(y)dy = 0$$

$$3) y'' + 4(y')^3 + 3y = 0$$

$$1) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = y - x$$

Definiciones Básicas

Definición 1 (E.D)

Si una ecuación contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**.

Definición 2 (E.D.O)

Si la ecuación contiene derivadas con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**.

Definición 3 (E.D.P)

Si la ecuación contiene derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial**.

Ejemplos

1) $y' + 4y = 5$

2) $(x^2 - y)dx + 5 \cos(y)dy = 0$

3) $y'' + 4(y')^3 + 3y = 0$

1) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = y - x$

Definición 4 (Orden)

La derivada o derivada parcial de orden más alto determina el **orden** de la E.D.

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por

$$\mathcal{C}^n(U) = \{g : U \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ tiene derivadas continuas hasta el orden } n\}.$$

Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma **implícita** cuando tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

donde $F \in \mathcal{C}^0(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Y decimos que está expresada en forma **explícita** cuando tenemos

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

con $f \in \mathcal{C}^0(D)$ y D abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 4 (Orden)

La derivada o derivada parcial de orden más alto determina el **orden** de la E.D.

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por

$$\mathcal{C}^n(U) = \{g : U \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ tiene derivadas continuas hasta el orden } n\}.$$

Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma **implícita** cuando tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

donde $F \in \mathcal{C}^0(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Y decimos que está expresada en forma **explícita** cuando tenemos

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

con $f \in \mathcal{C}^0(D)$ y D abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 4 (Orden)

La derivada o derivada parcial de orden más alto determina el **orden** de la E.D.

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por

$$\mathcal{C}^n(U) = \{g : U \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ tiene derivadas continuas hasta el orden } n\}.$$

Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma **implícita** cuando tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

donde $F \in \mathcal{C}^0(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Y decimos que está expresada en forma **explícita** cuando tenemos

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

con $f \in \mathcal{C}^0(D)$ y D abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

- 1) $x^2y'' + \sin(x)y' + x^2y = e^x \leftarrow$ lineal de orden 2 no homogénea
- 2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0 \leftarrow$ no lineal de orden 3 homogénea
- 3) $y^2y'' + yy' + xy = x \leftarrow$ no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

- 1) $x^2y'' + \sin(x)y' + x^2y = e^x \leftarrow$ lineal de orden 2 no homogénea
- 2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0 \leftarrow$ no lineal de orden 3 homogénea
- 3) $y^2y'' + yy' + xy = x \leftarrow$ no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

- 1) $x^2y'' + \sin(x)y' + x^2y = e^x \leftarrow$ lineal de orden 2 no homogénea
- 2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0 \leftarrow$ no lineal de orden 3 homogénea
- 3) $y^2y'' + yy' + xy = x \leftarrow$ no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

- 1) $x^2y'' + \sin(x)y' + x^2y = e^x \leftarrow$ lineal de orden 2 no homogénea
- 2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0 \leftarrow$ no lineal de orden 3 homogénea
- 3) $y^2y'' + yy' + xy = x \leftarrow$ no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

- 1) $x^2y'' + \sin(x)y' + x^2y = e^x \leftarrow$ lineal de orden 2 no homogénea
- 2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0 \leftarrow$ no lineal de orden 3 homogénea
- 3) $y^2y'' + yy' + xy = x \leftarrow$ no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

- 1) $x^2y'' + \sin(x)y' + x^2y = e^x \leftarrow$ lineal de orden 2 no homogénea
- 2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0 \leftarrow$ no lineal de orden 3 homogénea
- 3) $y^2y'' + yy' + xy = x \leftarrow$ no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 6 (Curva Integral)

Una **solución o curva integral** de la EDO $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplos:

- 1 $y = e^{2x}$ es solución de $y' = y + e^{2x}$. También $y = e^{2x} + e^x$ es solución de la EDO. En general $y = e^{2x} + ce^x$ es solución $\forall c \in \mathbb{R}$.
- 2 $x = y \ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$. En efecto:
Derivando implícitamente:

$$1 = \frac{dy}{dx} \ln(cy) + y \frac{1}{cy} c \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} (\ln(cy) + 1).$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy) + 1} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Definición 6 (Curva Integral)

Una **solución o curva integral** de la EDO $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplos:

- 1 $y = e^{2x}$ es solución de $y' = y + e^{2x}$. También $y = e^{2x} + e^x$ es solución de la EDO. En general $y = e^{2x} + ce^x$ es solución $\forall c \in \mathbb{R}$.
- 2 $x = y \ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$. En efecto:
Derivando implícitamente:

$$1 = \frac{dy}{dx} \ln(cy) + y \frac{1}{cy} c \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} (\ln(cy) + 1).$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy) + 1} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Definición 6 (Curva Integral)

Una **solución o curva integral** de la EDO $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplos:

- 1 $y = e^{2x}$ es solución de $y' = y + e^{2x}$. También $y = e^{2x} + e^x$ es solución de la EDO. En general $y = e^{2x} + ce^x$ es solución $\forall c \in \mathbb{R}$.
- 2 $x = y \ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$. En efecto:
Derivando implícitamente:

$$1 = \frac{dy}{dx} \ln(cy) + y \frac{1}{cy} c \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} (\ln(cy) + 1).$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy) + 1} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Definición 6 (Curva Integral)

Una **solución o curva integral** de la EDO $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplos:

- 1 $y = e^{2x}$ es solución de $y' = y + e^{2x}$. También $y = e^{2x} + e^x$ es solución de la EDO. En general $y = e^{2x} + ce^x$ es solución $\forall c \in \mathbb{R}$.
- 2 $x = y \ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$. En efecto:
Derivando implícitamente:

$$1 = \frac{dy}{dx} \ln(cy) + y \frac{1}{cy} c \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} (\ln(cy) + 1).$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy) + 1} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Definición 6 (Curva Integral)

Una **solución o curva integral** de la EDO $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplos:

- 1 $y = e^{2x}$ es solución de $y' = y + e^{2x}$. También $y = e^{2x} + e^x$ es solución de la EDO. En general $y = e^{2x} + ce^x$ es solución $\forall c \in \mathbb{R}$.
- 2 $x = y \ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$. En efecto:
Derivando implícitamente:

$$1 = \frac{dy}{dx} \ln(cy) + y \frac{1}{cy} c \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} (\ln(cy) + 1).$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy) + 1} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Definición (Solución Constante)

La función $y(x) = y_0$ es llamada **solución constante** de la EDO $y' = f(x, y)$ si $f(x, y_0) = 0, \forall x \in I \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo:

① $y' = \frac{2y(1-4y)}{x-1}$, dominio: $D = \{(x, y) : x \neq 1\}$.

Soluciones ctes: $\varphi_1, \varphi_2 : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1/4$
 $\varphi_3, \varphi_4 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1/4$

② $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2+1)}$, con $y \neq 0$. Dominio $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$.

Como $\frac{1-y^2}{y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, tenemos las soluciones ctes:

$$u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } u_1(x) = 1, u_2(x) = -1$$

Los pts en los que el 2do miembro de la E.D. $y' = f(x, y)$ no esta definido, se llaman **puntos singulares**.

Definición (Solución Constante)

La función $y(x) = y_0$ es llamada **solución constante** de la EDO $y' = f(x, y)$ si $f(x, y_0) = 0, \forall x \in I \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo:

① $y' = \frac{2y(1-4y)}{x-1}$, dominio: $D = \{(x, y) : x \neq 1\}$.

Soluciones ctes: $\varphi_1, \varphi_2 : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1/4$
 $\varphi_3, \varphi_4 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1/4$

② $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2+1)}$, con $y \neq 0$. Dominio $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$.

Como $\frac{1-y^2}{y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, tenemos las soluciones ctes:

$$u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } u_1(x) = 1, u_2(x) = -1$$

Los pts en los que el 2do miembro de la E.D. $y' = f(x, y)$ no está definido, se llaman **puntos singulares**.

Definición (Solución Constante)

La función $y(x) = y_0$ es llamada **solución constante** de la EDO $y' = f(x, y)$ si $f(x, y_0) = 0, \forall x \in I \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo:

① $y' = \frac{2y(1-4y)}{x-1}$, dominio: $D = \{(x, y) : x \neq 1\}$.

Soluciones ctes: $\varphi_1, \varphi_2 : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1/4$
 $\varphi_3, \varphi_4 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1/4$

② $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2+1)}$, con $y \neq 0$. Dominio $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$.

Como $\frac{1-y^2}{y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, tenemos las soluciones ctes:

$$u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } u_1(x) = 1, u_2(x) = -1$$

Los pts en los que el 2do miembro de la E.D. $y' = f(x, y)$ no esta definido, se llaman **puntos singulares**.

En algunos casos, una E.D tiene una solución que no se puede obtener particularizando el parámetro constante de la familia de soluciones. Tal solución es llamada **solución singular**.

Ejemplo: $y' = xy^{1/2}$

- Solución cte: $y = 0$
- Solución general: $y = (\frac{x^2}{4} + c)^2$

La solución cte es singular, pues no existe un $c \in \mathbb{R}$ tq a partir de la sol. general se recupere la solución cte $y = 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Ejemplos:

1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow \text{sol. cte}$

2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Ejemplos:

- 1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow$ sol. cte
- 2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Ejemplos:

- 1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow$ sol. cte
- 2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Ejemplos:

1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow \text{sol. cte}$

2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Ejemplos:

1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow$ sol. cte

2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Ejemplos:

1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow$ sol. cte

2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x, y)$.

La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

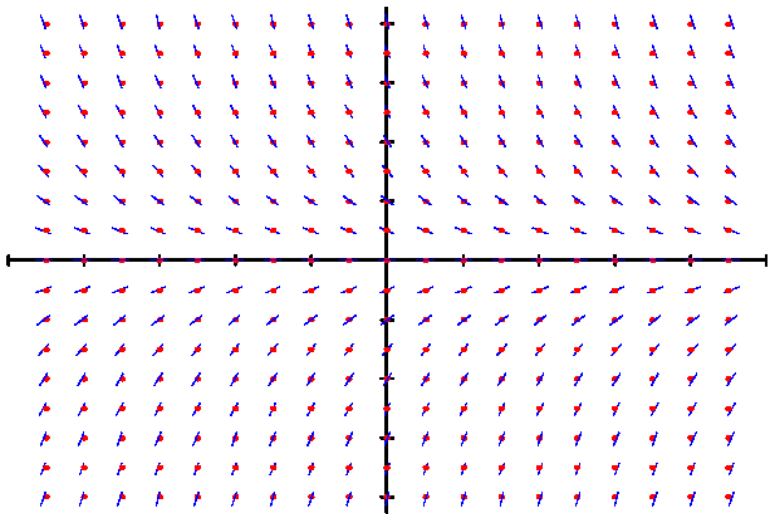
A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

- 1) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
- 2) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

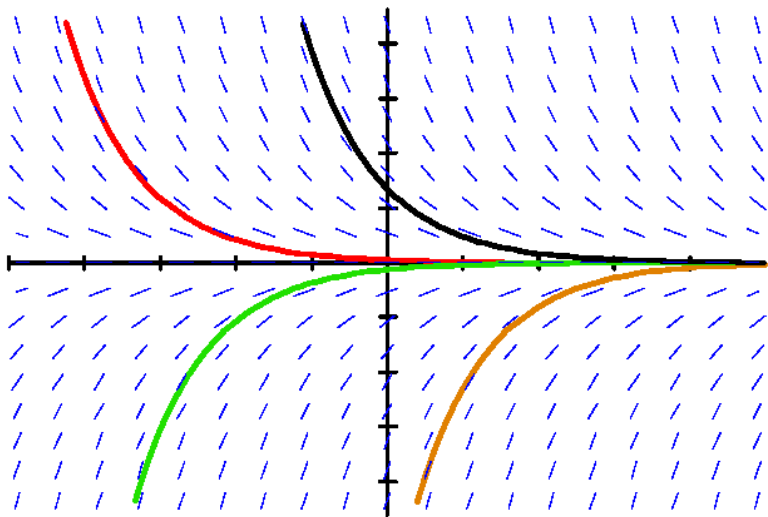
Ejemplos:

- 1) $y' = -y, y = 0 \leftarrow$ sol. cte
- 2) $y' = -(x/y)^2, y \neq 0$

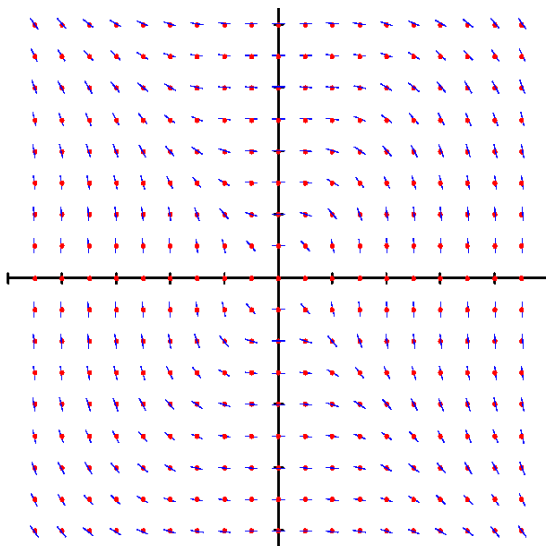
Campos de Direcciones (Ejm 1)



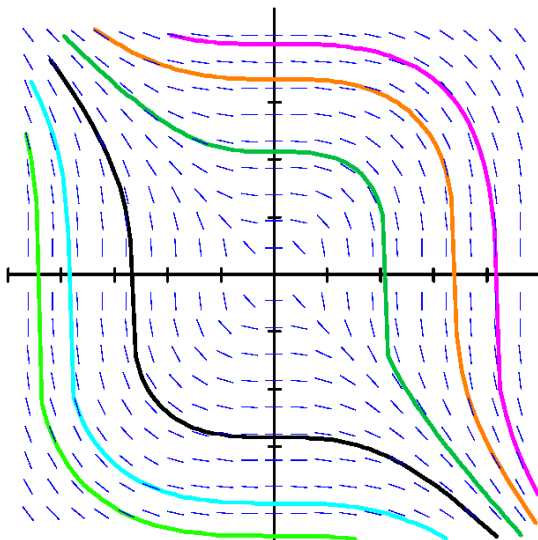
Campos de Direcciones (Trazado de curvas)



Campos de Direcciones (Ejm 2)



Campos de Direcciones (Trazado de curvas)



B) Método de las Isoclinas: Seguir los siguientes pasos

- 1 Trazar las curvas $f(x, y) = c$, variando los valores de c . Tales curvas son llamadas **Isoclinas o curvas de nivel**
- 2 Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$.
- 3 Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Obs. A menudo es más fácil dibujar el campo de direcciones si previamente se conocen algunas isoclinas.

Ejemplos:

- 1) $y' = x + y^2$
- 2) $y' = \text{sen}(x) - y$
- 3) $y' = \text{sen}(x + y)$

B) Método de las Isoclinas: Seguir los siguientes pasos

- 1 Trazar las curvas $f(x, y) = c$, variando los valores de c . Tales curvas son llamadas **Isoclinas o curvas de nivel**
- 2 Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$.
- 3 Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Obs. A menudo es más fácil dibujar el campo de direcciones si previamente se conocen algunas isoclinas.

Ejemplos:

- 1) $y' = x + y^2$
- 2) $y' = \text{sen}(x) - y$
- 3) $y' = \text{sen}(x + y)$

B) Método de las Isoclinas: Seguir los siguientes pasos

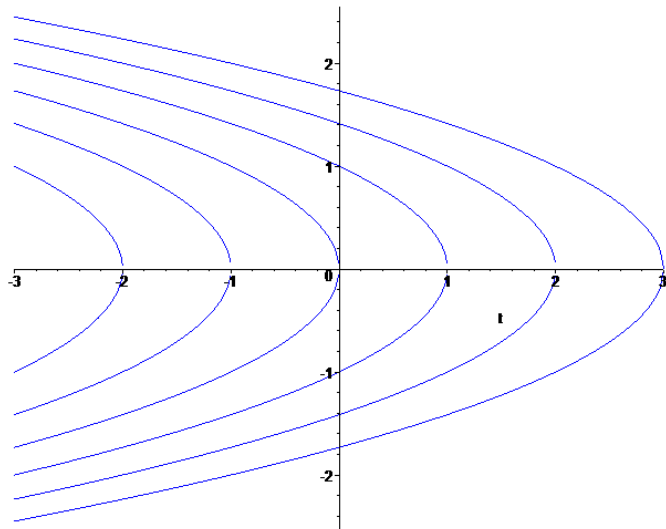
- 1) Trazar las curvas $f(x, y) = c$, variando los valores de c . Tales curvas son llamadas **Isoclinas o curvas de nivel**
- 2) Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$.
- 3) Trazar la curva solución haciendola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

Obs. A menudo es más fácil dibujar el campo de direcciones si previamente se conocen algunas isoclinas.

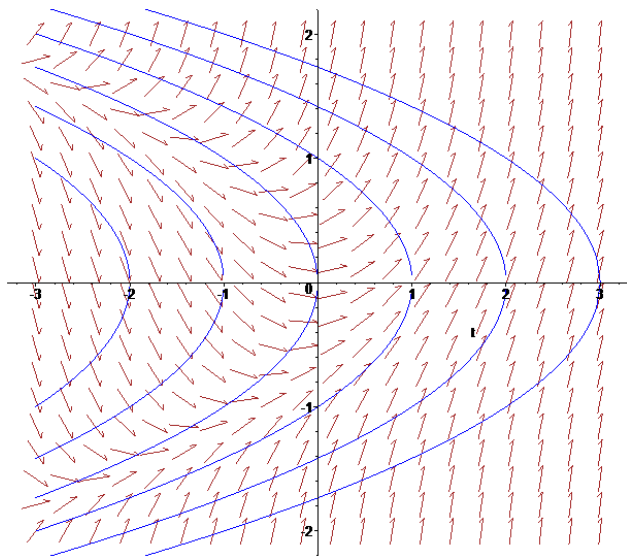
Ejemplos:

- 1) $y' = x + y^2$
- 2) $y' = \text{sen}(x) - y$
- 3) $y' = \text{sen}(x + y)$

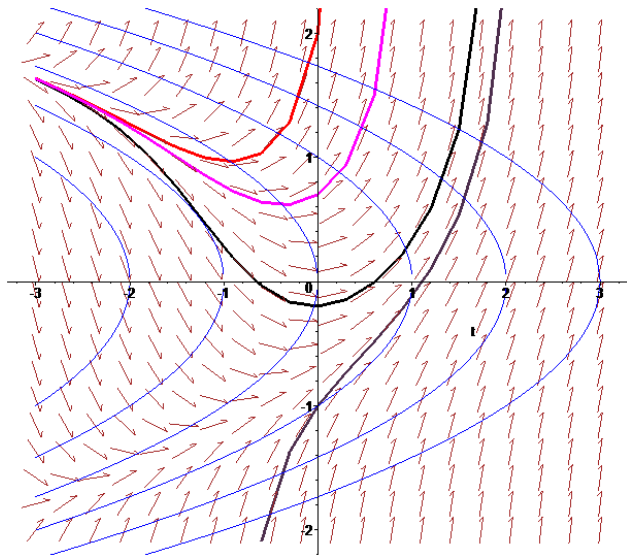
Trazado de Isoclinas (Ejm 1)



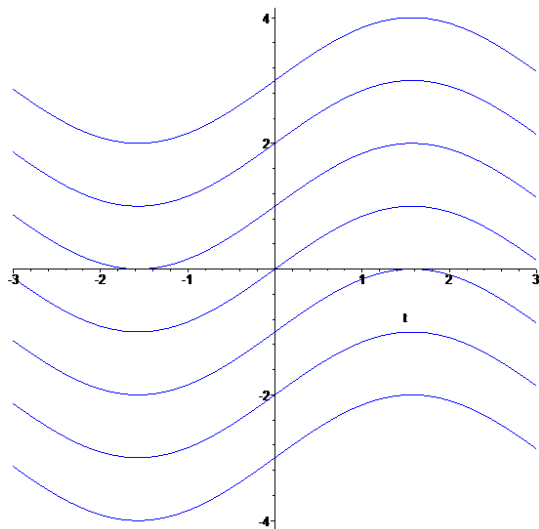
Campos de Direcciones sobre las Isoclinas



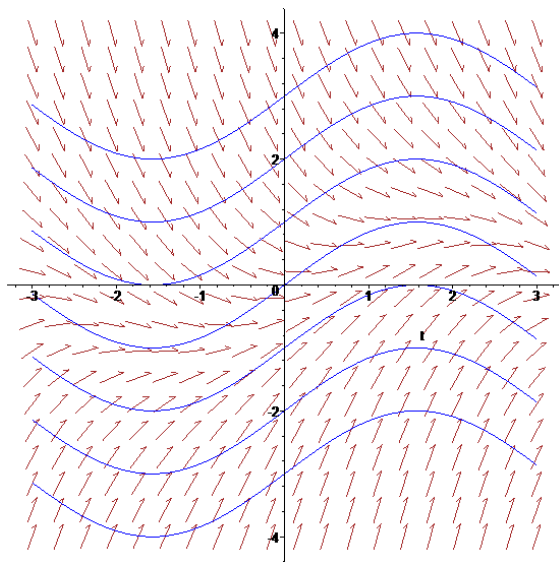
Trazado de curvas soluciones



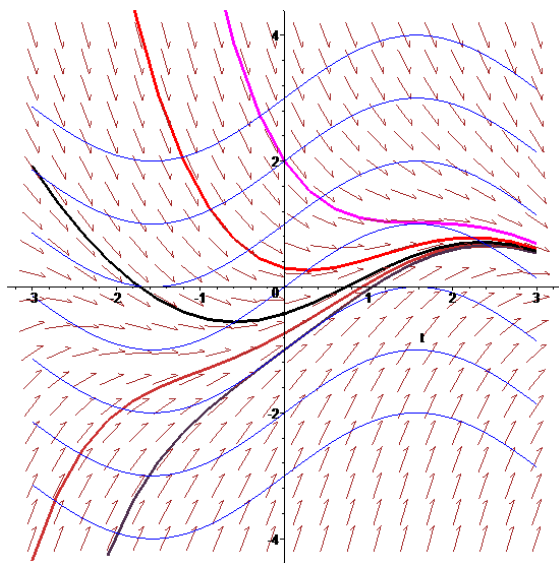
Trazado de Isoclinas (Ejm 2)



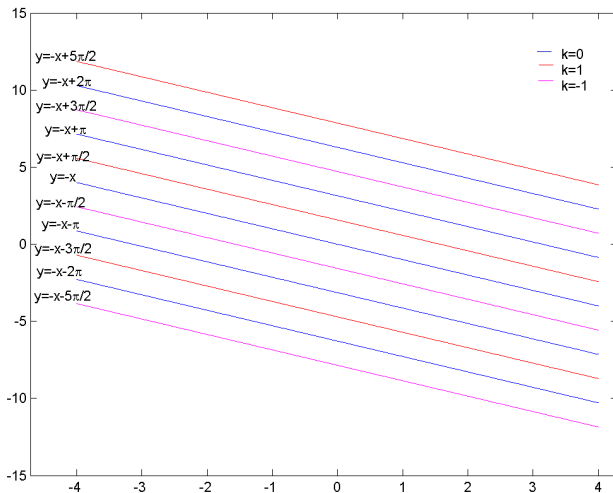
Campos de Direcciones sobre las Isoclinas



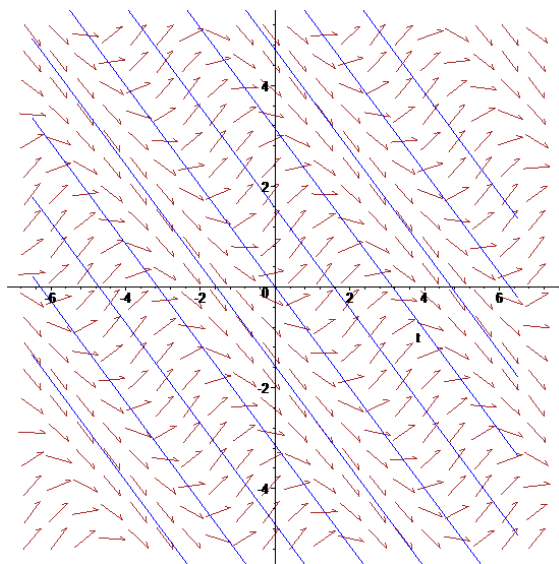
Trazado de curvas soluciones



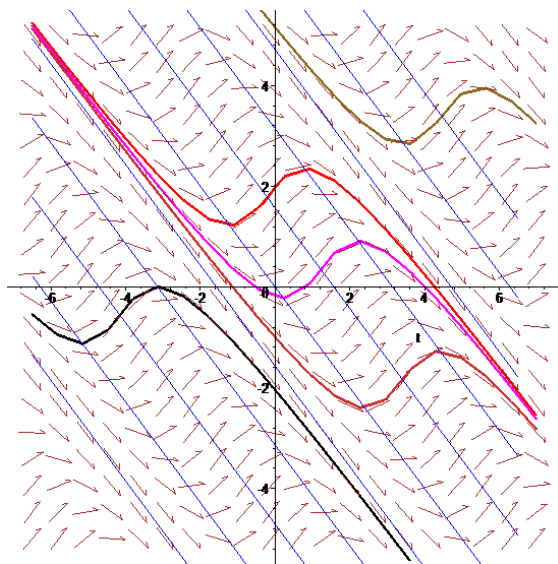
Trazado de Isoclinas (Ejm 3)



Campos de Direcciones sobre las Isoclinas



Trazado de curvas soluciones



- 1 La isoclina nula $f(x, y) = 0$ proporciona las líneas en las que puedan estar situadas los puntos máximos y mínimos de las curvas integrales.
- 2 Para mayor exactitud se halla también el lugar geométrico de los puntos de inflexión. Para ello se halla y'' :

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

y se iguala a cero.

- 3 La línea determinada por la ec.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0$$

es el L.G. de los puntos de inflexión.

Ecuación de Continuidad

- Con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias E. D.
- Nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (tanque, órgano humano, sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida.
- Si x es la variable, $E(t) :=$ tasa de entrada y $S(t) :=$ tasa de salida,
$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t)$$

Ejemplo: La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azúcares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa.

■ $C(t) :=$ concentración de glucosa en un instante t ,

■ $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$,

la E.D. que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$

Ecuación de Continuidad

- Con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias E. D.
- Nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (tanque, órgano humano, sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida.
- Si x es la variable, $E(t) :=$ tasa de entrada y $S(t) :=$ tasa de salida,
$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t)$$

Ejemplo: La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azúcares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa.

■ $C(t) :=$ concentración de glucosa en un instante t ,

■ $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$,

la E.D. que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$

Ecuación de Continuidad

- Con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias E. D.
- Nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (tanque, órgano humano, sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida.
- Si x es la variable, $E(t) :=$ tasa de entrada y $S(t) :=$ tasa de salida,
$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t)$$

Ejemplo: La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azúcares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa.

■ $C(t) :=$ concentración de glucosa en un instante t ,

■ $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$,

la E.D. que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$

Ecuación de Continuidad

- Con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias E. D.
- Nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (tanque, órgano humano, sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida.
- Si x es la variable, $E(t) :=$ tasa de entrada y $S(t) :=$ tasa de salida,
$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t)$$

Ejemplo: La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azúcares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa.

■ $C(t) :=$ concentración de glucosa en un instante t ,

■ $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$,

la E.D. que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$