(Ecuación del calor en una esfera)

Considere la ecuación del calor en una esfera sólida de radio R, con difusividad $\alpha > 0$. Buscaremos soluciones u con simetría radial, es decir, $u(r, \theta, \varphi, t) = u(r, t)$, con las siguientes condiciones:

Condiciones de borde: $u(r = R, t) = 0 \forall t > 0$, $u(r, \infty) < \infty \forall r \in [0, R]$.

Condición inicial: $u(r, 0) = f(r) \forall r \in [0, R]$.

Además pediremos que la solución sea continua en todo punto (en particular en el origen).

i) Muestre que la solución u satisface la ecuación $u_t = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u \cdot r)$

ii) Plantee soluciones de la forma $u(r, t) = F(t)G(r)$ y muestre que la solución es de la forma $\sum_{k\geq 1} a_k e^{-\alpha b_k^2 t} sin(b_k r)/r$, encontrando en forma explícita los coeficientes a_k, b_k. *Hint: En cierto momento le puede ser útil definir la función H(r)=rG(r).*

Sol

i) Sabemos que la ecuación del calor en un sólido es $\alpha\triangle u = u_t$. Pero $\triangle u = \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r +" algo" u_{\theta\theta} +" algo" u_{\varphi\varphi}$, donde los términos "algo" no interesan, pues como u tiene simetría radial, las derivadas parciales con respecto a θ y φ se anulan. Reescribiendo, resulta $\triangle u = \frac{1}{r^2}(2ru_r + r^2 u_{rr})$. Si desarrolamos lo que nos proponen, resulta que $\frac{1}{r}(ur)_{rr} = \frac{1}{r}(u_r r + u)_r = \frac{1}{r}(u_{rr} r + u_r + u_r) = \triangle u$ (pues es la expresión que teníamos arriba). Así, reemplazando en la ecuación del calor concluimos que u verifica $u_t = \frac{\alpha}{r}(ur)_{rr}$, que es justamente lo que nos pedían.

ii) Suponiendo $u(t, r) = F(t)G(r) \Rightarrow u_t = F'G, (ur)_{rr} = F\frac{d^2}{dt^2}(Gr) = FH''$, donde $H(r) = rG(r)$. Así, tenemos que $\forall t, r$, reemplazando en la ecuación, se tiene que $F'G = \frac{\alpha}{r}FH'' \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{\alpha}{rG}H'' = \lambda(cte)$.

Pero $F' = \lambda F \Rightarrow F(t) = Ae^{\lambda t}$. La condición $u(r, \infty) < \infty$ indica que o bien $A = 0$ (lo que implicaría que u es la función cero, que no interesa) o $\lambda < 0$.

Además tenemos que $\alpha H'' = \lambda H$. Como $\frac{\lambda}{\alpha} < 0$, tenemos que entonces $H(r) = Bcos(\sqrt(-\lambda/\alpha)r) + Csin(\sqrt(-\lambda/\alpha)r) \Rightarrow G(r) = \frac{1}{r}[Bcos(\sqrt(-\lambda/\alpha)r) + Csin(\sqrt(- \lambda/\alpha)r)]$. Notemos que esta función tiene problemas en el origen, y estamos buscando funciones continuas en el origen. Recordando que $sin(hr)/r$ es continua en cero (definiéndola adecuadamente), notamos que la condición que debemos imponer entonces es $B = 0$, pues si no la solución diverge en 0.

Así, juntando todo, resulta que $u(t, r) = F(t)G(r) = De^{\lambda t} sin(\sqrt(-\lambda/\alpha)r)/r$, donde $D = AC$. Pero la condición de borde $u(t, R) = 0 \forall t \Rightarrow sin(\sqrt(-\lambda/\alpha)R) = 0 \Rightarrow \sqrt(- \lambda/\alpha)R = k\pi \Rightarrow \lambda = \frac{-\alpha k^2\pi^2}{R^2}$. Reemplazando en la ecuación, y notando que para $k \in \mathbb{N}$ tenemos una solución u_k distinta, llegamos a que $u_k(r, t) = D_k e^{-\alpha b_k^2 t} sin(b_k r)/r$, con $b_k = \frac{k\pi}{R}$. Por el principio de superposición, tendremos que:

$u(t, r) = \sum_{k\geq 1} D_k e^{-\alpha b_k^2 t} sin(b_k r)/r$, que es a lo que queríamos llegar. Así, sólo falta determinar las constantes D_k. Imponiendo la condición inicial, llegamos a que $f(r) = \sum_{k\geq 1} D_k sin(k\pi r/R)/r \Rightarrow rf(r) = \sum_{k\geq 1} D_k sin(k\pi r/R)$. Es decir, estamos calculando exactamente la serie de fourier de la extensión impar de la función $rf(r)$, luego $D_k = \frac{2}{R}\int_0^R rf(r) sin(k\pi r/R)$.