

iii) tomemos $f(z) = \frac{1}{z^2}$

Def: f cumple todas las hipótesis del problema.

Además: 0 es polo de orden 2 de f // y es el único polo.
 0 es polo de orden 3 de g ..

En efecto:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi \cot(\pi z)}{\sin(\pi z)} z = 1 \neq 0.$$

• por ii) sabemos que: $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{1}{m^2} = -\text{Res}\left(\pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2}, 0\right)$

pero: $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{1}{m^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

calculamos el residuo: (orden 3!!)

Def: el límite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \pi \cot(\pi z) \frac{z^3}{z^2} \right\}$ es lo que se calcula

(pero que después de derivar 2 veces hay que calcular el límite como con 4 L'Hopital's.)

mejor alternativa:

1) Expandir $\cot(\pi z)$ en serie de Taylor centrada en 0: $\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi z} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} \right)$

2) Calcula $\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{\pi}{z^2} \frac{1}{\pi z} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} - \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2 z}{3} + \dots$

y consideramos el coeficiente de la potencia -1 (definición de residuo)
 que es, en este caso: $-\frac{\pi^2}{3}$... y concluimos ...

(12)