AUXILIAR 12 SEPTIEMBRE

**P1**

Bosqueje los siguientes conjuntos y determine si son cerrados, abiertos o ninguna

a) $\{e^z : Re(z) \in [a,b], Im(z) \in [c,d]\}$ (con $a,b > 0, 0 < c < d < 2\pi$).

*Hint: Escriba z= $x + iy$ y recuerde que multiplicar por $e^{it}$, con t un real, es rotar en un ángulo t.*

b) $\{z : Im(z^2) > 0 \vee (Re(z))^3 > 0\}$

**P2**

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en cero y que verifica $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $f(z+w) = f(z)f(w)$. Pruebe que $f$ es continua.

*Sol:*

Evaluemos con $w=0$. Resulta $f(z) = f(z)f(0)\forall z$. El primer caso es $f(0) = 0$, lo que implicaría que $f$ es la función nula y por ello continua.

La segunda opción es $f(0) = 1$. Veamos que $f$ es continua en $z$ cualquiera. Sea $z_n \to z$. Nos interesa ver que $f(z_n) \to f(z)$. En efecto, si tomamos $h_n = z_n - z$, resulta que $h_n \to 0$, además $lim f(z_n) - f(z) = lim f(z+h_n) - f(z) = lim f(z)(f(h_n) - 1)$ (gracias a la prop bacan de la función) $= f(z)(lim f(h_n) - 1) = f(z)(1-1)$ (pues f es continua en 0) $= 0$.

**P3**

Encuentre los radios de convergencia para las siguientes series (recordando que siempre $\frac{1}{R} = limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$.

*a)* $\sum_{n\geq 1} n!(z-i)^{n!}$. (Hint: Escriba la serie como $\sum_{n\geq 1} a_n(z-i)^n$ y note que la mayoría de los $a_n$ son ceros).

*b)* $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$. (Hint: Recuerde el "criterio del cuociente": Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que no se anula y tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$, entonces $(|a_n|)^{\frac{1}{n}} \to L$).

*c)* $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$, con $a_k = 2$ para k par, $a_k = 1$ para k impar. Pruebe además que la serie no converge en el borde del disco de convergencia. Demuestre, por último, que esta serie es la serie de la función $g(z) = \frac{2+z}{1-z^2}$. (Hint: Recuerde que $\frac{1}{1-z} = \sum_{k\geq 0} z^k$, en el disco de centro 0 y radio 1.)

**P4**

Desarrolle en serie de potencias en torno al cero la función $g(z) = ln(\frac{z+1}{z-1})$, donde consideramos $arg(z) \in [-\pi/2, 3\pi/2)$.

*Sol*

$g(z) = ln(z+1) - ln(z-1)$. Desarrollemos entonces la serie del primer sumando (al que llamaré $g_1$). El segundo se hace de forma muy similar así que queda de ejercicio.

La clásica serie que uno sabe manejar es la serie armónica, es decir, aquella de la función $\frac{1}{1-z}$. Pero $g_1' = \frac{1}{1+z} = \sum_{k\geq 0}(-z)^k = \sum_{k\geq 0}(-1)^k z^k$. A uno le gustaría “integrar”, sin embargo no conocemos ningún teorema que nos diga como integrar una serie de potencias (intercambiando la integral con la suma, por ejemplo). Sin embargo, lo que sí sabemos es como derivar una serie de potencias (se hace término a término, revisen el apunte y las cátedras si no lo sabían). Así, el truco en este caso es definir la función $h_1(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{k+1}}{k+1}$ (que es la función que a uno le “gustaría” que fuera la expresión en seri de potencias de $g_1$). Notemos entonces que si derivamos esta función, resulta $h_1'(z) = g_1'(z)$ (para todo z en el disco de convergencia de $h_1$, que deben calcular). Un resultado visto asegura entonces que $h_1 = g_1 + cte$. Sin embargo, $h_1(0) = 0 = g_1(0) \Rightarrow g_1 = h_1$. (OJO: Este es el truco estándar cuando uno quiere “integrar”... aprovechar que lo que sabemos es derivar las series de potencias). Para $g_2$ queda propuesto. Tengan cuidado con la constante que en este caso no es cero. Deben además al final encontrar cuál es el disco en el que esta expresión es válida.

CUALQUIER DUDA POR UCURSOS O EN LAS PROXIMAS AUXILIARES. SALUDOS!