Ejercicios Resueltos de Integrales y Residuos.

P12.2. Calcule: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1+a^2-2a\cos\theta}\, d\theta \quad , a\in(0,1)$

Solución: • $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1+a^2-2a\cos\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2i}\, \frac{z^{2n}+1}{z^n(-az^2+(1+a^2)z-a)}\, dz$

$$\boxed{\begin{array}{l} z=e^{i\theta} \\ \frac{dz}{iz}=d\theta \end{array}}$$

$$= -\frac{1}{2ia}\oint_{|z|=1} \frac{z^{2n}+1}{z^n(z-1/a)(z-a)}\, dz \longrightarrow \text{polos: } \begin{array}{ll} z_1=0 & \text{orden } n \\ z_2=1/a & \text{orden } 1 \\ z_3=a & \text{orden } 1 \end{array}$$

$$-az^2+(1+a^2)z-a = -a(z-1/a)(z-a)$$

obs: como $a\in(0,1)$
$\longrightarrow 1/a \notin B_1(0)$
(así que este polo no es de interés).

• Por el teorema de los Residuos:

$$\oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^{2n}+1}{z^n(z-1/a)(z-a)}}_{f(z)}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f,a)$$

• Cálculo de los residuos:

1) $\displaystyle\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{z^{2n}+1}{z^n(z-1/a)\cancel{(z-a)}}\cancel{(z-a)} = \frac{a^{2n}+1}{a^n}\cdot\frac{1}{(a-a^{-1})}$

$$= \frac{a^n+a^{-n}}{a-a^{-1}}$$

$$2)\ \mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \frac{z^{2n}+1}{(z-1/a)(z-a)\cancel{z^n}} \cancel{(z-0)^n} \right\}$$

pero $$\frac{z^{2n}+1}{(z-1/a)(z-a)} = \frac{1}{(a^{-1}-a)} \left\{ \frac{z^{2n}+1}{z-1/a} - \frac{z^{2n}+1}{z-a} \right\}$$

(fracciones parciales)

además: $$\frac{d^k}{dz^k}\left\{\frac{1}{z-\alpha}\right\} = (-1)^k\, k!\, \frac{1}{(z-\alpha)^{k}}$$

y $$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$$ (Regla de Leibnitz para la derivación)

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(a^{-1}-a)} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z^{2n}+1}{z-1/a}\right) - \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z^{2n}+1}{z-a}\right) \right\}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!(a^{-1}-a)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^k}{dz^k}(z^{2n}+1) \frac{d^{n-k-1}}{dz^{n-k-1}} \left(\frac{1}{z-1/a} - \frac{1}{z-a} \right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(a^{-1}-a)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^k}{dz^k}(z^{2n}+1) \left\{ (-1)^{n-k-1} (n-k-1)! \left\{ \frac{1}{(z-1/a)^{n-k}} - \frac{1}{(z-a)^{n-k}} \right\} \right\}$$

al tomar límite el único término de la suma que no se anula es el asociado a $k=0$.

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(a^{-1}-a)} \left\{ (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(-1)^n (1/a)^n} - (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(-1)^n a^n} \right\}$$

$$= \frac{1}{a^{-1}-a} \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{-n}} \right) = \frac{a^{-n} - a^n}{a^{-1}-a}.$$

P12.3. Sea $D=\{x+iy\in\mathbb{C} \mid x,y>0\}$

$f:\bar{D}\to\mathbb{C}$

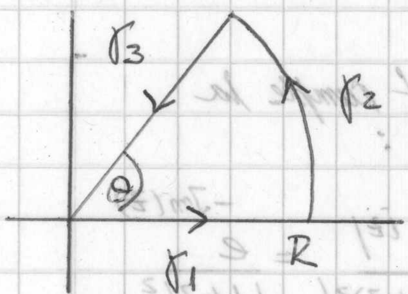
$f\in\mathcal{C}(\bar{D})\cap\mathcal{H}(D)$

Además $\exists M\geq 0\ \underset{|z|\geq 1}{\forall z\in\bar{D}}: |f(z)|\leq M/|z|^2$. (*1)

1) Probar que $\forall\theta\in[0,\pi/2]$ se tiene: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = e^{i\theta}\int_0^\infty f(e^{i\theta}x)\,dx$

Sol: • Obs: los casos $\theta=0$ y $\theta=\pi/2$ se verifican directamente.

• Sea $\theta\in(0,\pi/2)$. Y consideremos el contorno, para $R>>1$:



• $\displaystyle\oint_\Gamma f = 0$ $\quad(f\in\mathcal{C}(\bar{D})\cap\mathcal{H}(D))$.

$\Gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$

• $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx$

$\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_R^0 f(re^{i\theta})e^{i\theta}\,dr = -e^{i\theta}\int_0^R f(re^{i\theta})\,dr.$

$z=re^{i\theta}$
$dz=e^{i\theta}dr$

$\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^\theta |f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}|\,d\theta = R\int_0^\theta |f(Re^{i\theta})|\,d\theta \leq RM\int_0^\theta \frac{d\theta}{|Re^{i\theta}|^2} = \frac{MR\theta}{R^2} = \frac{M\theta}{R}$

$z=Re^{i\theta}$
$dz=Rie^{i\theta}d\theta$ y $\left|\int f\right|\leq\int|f|$

$$\Rightarrow \left|\int_{\Gamma_2} f\right| \leq \frac{M\theta}{R} \rightarrow \lim_{R\to\infty} \left|\int_{\Gamma_2} f\right| = 0 \iff \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f = 0.$$

así: $$0 = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f + \int_{\Gamma_3} f$$

$$= \int_0^R f(x)dx + \int_{\Gamma_2} f - e^{i\theta}\int_0^R f(re^{i\theta})\,dr$$

tomando límite $R\to\infty$ se obtiene el resultado.

$$\therefore \int_0^\infty f(x)dx = e^{i\theta}\int_0^\infty f(e^{i\theta}x)dx.$$

2) Si $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z)^2}$, $\theta = \pi/2$

[notar que f cumple la propiedad (*1):

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|(1+z)^2|} = \frac{e^{-\operatorname{Im}(z)}}{|1+z|^2} \leq Cte.\ \frac{1}{|z|^2}$$]

Entonces:

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{(1+x)^2}dx = i\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+ix)^2}dx$$

$$= i\int_0^\infty \frac{(1-ix)^2 e^{-x}}{(1+xi)^2(1-xi)^2}dx$$

$\rightarrow$ (considerando la parte real de la igualdad anterior):

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{(1+x)^2} = \operatorname{Re}\left\{ i\int_0^\infty \frac{(1-ix)^2 e^{-x}}{(1+x^2)^2}dx \right\}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2x\,e^{-x}}{(1+x^2)^2}dx = \underbrace{\frac{-1}{(1+x^2)}e^{-x}\Big|_0^\infty}_{\text{integrando por partes}} - \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{1+x^2}$$

P12.4. Calcular: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx$ con $n, m \in \mathbb{N}$ tq $n-m \geq 2$ (*2)

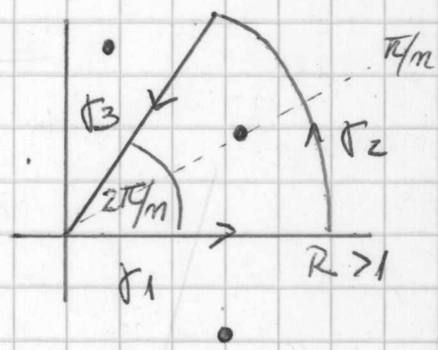
Sol: denotemos por $f(z) = \dfrac{z^m}{z^n+1}$,

• polos de f $\rightarrow$ raíces n-ésimas de la unidad: $\left\{ e^{\frac{i\pi(2k+1)}{n}} \right\}_{k=0}^{k=n-1}$

(todos son polos simples).

• para $R > 1$, consideremos el contorno:

Obs: $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ sólo encierra un polo simple de f: $e^{i\pi/n}$. ($\forall R>1$).



• Por el teorema de los Residuos:

$$\oint_\Gamma f = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/n})$$

• $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{x^m}{x^n+1}\,dx := I_R$

• $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{r^m e^{i2\pi m/n} e^{i2\pi/n}}{1+r^n \left(e^{i2\pi n/n}\right)}\,dr = e^{-i2\pi(m+1)/n} \int_0^R \frac{r^m}{1+r^n}\,dr$

$z = re^{i2\pi/n}$

$dz = e^{i2\pi/n}\,dr$

¡¡ $e^{i2\pi n\frac{}{n}} = e^{2\pi i} = 1$!! $= e^{-i2\pi(m+1)/n}\, I_R$.

• $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^{2\pi/n} \frac{|R^m e^{i\theta m}\, Ri e^{i\theta}|}{|1+R^n e^{in\theta}|}\,d\theta \leq \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1}}{R^n-1}\,d\theta$

$z = Re^{i\theta}$

$dz = Rie^{i\theta}\,d\theta$

$$\left[\begin{array}{l} \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \\ \Rightarrow \big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \\ \Rightarrow \dfrac{1}{|x+y|} \leq \dfrac{1}{\big||x|-|y|\big|} \end{array}\right]$$

$= \left(\dfrac{R^{m+1}}{R^n-1}\right)\dfrac{2\pi}{n} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

por (*2).

• Residuo:

$$\operatorname{Res}\left(f, e^{i\pi/n}\right) = \lim_{z\to e^{i\pi/n}} \left\{ \frac{z^m}{1+z^n} \left(z - e^{i\pi/n}\right) \right\}$$

$$= \lim_{z\to e^{i\pi/n}} \left\{ \frac{z^{m+1} - e^{i\pi/n} z^m}{1+z^n} \right\} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

L'Hôpital

$$= \lim_{z\to e^{i\pi/n}} \frac{(m+1) z^m - m e^{i\pi/n} z^{m-1}}{n z^{n-1}}$$

$$= \frac{(m+1) e^{i\pi m/n} - m e^{i\pi/n} e^{i\pi(m-1)/n}}{n e^{i\pi(n-1)/n}}$$

$\therefore$ juntando todo: $\quad I_R + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz - e^{i2\pi(m+1)/n} I_R = 2\pi i \cdot (\;)$

tomando $R\to\infty$ y despejando $I := \lim_{R\to\infty} I_R = \int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx$ debería llegar a

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\pi(m+1)/n\right)}.$$

PR.6. • Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus P)$ donde $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ polos de f.

• Supongamos f cumple la siguiente propiedad de decaimiento:

(*1) $\exists M, R > 0 \ \exists p > 1 \ \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R$ se tiene $|f(z)| \leq M/|z|^p$.

• Definamos la función auxiliar $g(z) = \pi \cot(\pi z) f(z)$.

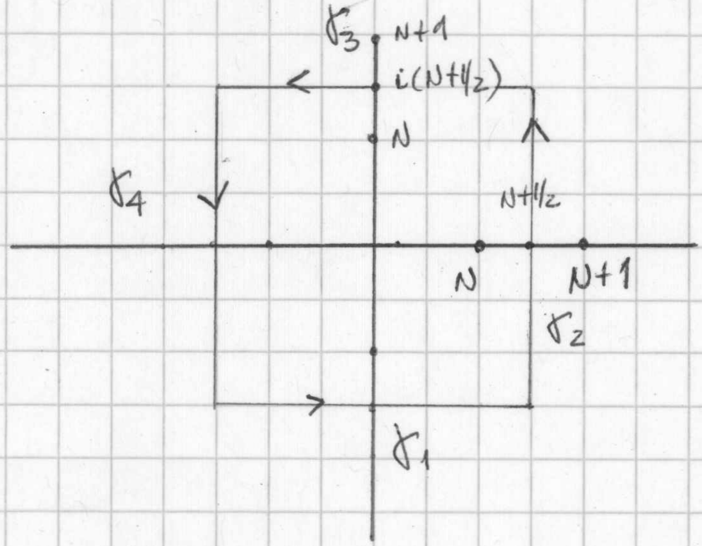
Obs: $\cot(\pi z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ tiene por polos a los ceros de $\operatorname{sen}(\pi z)$

[$\operatorname{sen}(\pi z) = 0 \iff \pi z = k\pi, k \in \mathbb{Z} \implies z = k, k \in \mathbb{Z}$.

de hecho los polos de $\cot(\pi z)$ son todos los enteros, con orden 1 los polos no nulos y orden 2 el cero.

$$\lim_{z \to 0} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} z = \lim_{z \to 0} \frac{\cos(\pi z)}{\pi} \underbrace{\frac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)}}_{1} = \frac{1}{\pi} \neq 0.$$]

i) $\forall N \geq 1$ definamos el camino: $C_N = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4$



pruebe que: $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \oint_{C_N} g(z)\,dz = 0.$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_1} g(z)\,dz\right| \overset{*4}{\leq} \pi \int_{-(N+1/2)}^{(N+1/2)} \left| \frac{e^{2i\pi(-i(N+1/2)+x)}+1}{e^{2i\pi(-i(N+1/2)+x)}-1} \right| \frac{M}{|x-i(N+1/2)|^p}\,dx$$

$$\leq \pi M \int_{-(N+1/2)}^{(N+1/2)} \left| \frac{e^{2\pi(N+1/2)}\,e^{2i\pi x}+1}{e^{2\pi(N+1/2)}\,e^{2i\pi x}-1} \right| \frac{1}{\left[(N+1/2)^2+x^2\right]^{p/2}}\,dx$$

- $x^2 \geq R^2$
- $|x+y| \leq |x|+|y|$
- $\dfrac{1}{|x-y|} \leq \dfrac{1}{||x|-|y||}$; $||x|-|y|| \leq |x-y|$
- $|e^{2i\pi\alpha}| = 1$, si $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\leq \pi M \int_{-(N+1/2)}^{(N+1/2)} \left(\frac{e^{2\pi(N+1/2)}+1}{e^{2\pi(N+1/2)}-1} \right) \frac{1}{((N+1/2)^2+R^2)^{p/2}}\,dx$$

$$= \pi M \underbrace{\frac{1}{((N+1/2)^2+R^2)^{p/2}}\, 2(N+1/2)}_{\text{del orden de: } \frac{(N+1/2)^1}{(N+1/2)^{2\cdot p/2}} = \frac{1}{(N+1/2)^{p-1}} \longrightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{e^{2\pi(N+1/2)}+1}{e^{2\pi(N+1/2)}-1} \right)}_{\lim_{N\to\infty} \cdot/\cdot = 1}$$

pues $p>1$.

$$\therefore \lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_1} g = 0.$$

- $\displaystyle\int_{\gamma_3} g \xrightarrow{N\to\infty} 0$ (el acotamiento es analogo al anterior).

$$\bullet \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = \int_{-(N+1/2)}^{N+1/2} \left| \frac{e^{2i\pi(N+1/2+iy)}+1}{e^{2i\pi(N+1/2+iy)}-1} \right| \frac{M}{((N+1/2)^2+y^2)^{p/2}} |i|\,dy$$

$$\left[\begin{array}{l} z=(N+1/2)+iy \\ dz = i\,dy \\ y: -(N+1/2) \rightsquigarrow (N+1/2) \end{array}\right]$$

$$\leq \pi M \int_{-(N+1/2)}^{N+1/2} \left| \frac{e^{2i\pi(N+1/2)}e^{-2\pi y}+1}{e^{2i\pi(N+1/2)}e^{-2\pi y}-1} \right| \frac{dy}{((N+1/2)^2+R^2)^{p/2}}$$

$$\leq \frac{\pi M}{((N+1/2)^2+R^2)^{p/2}} \int_{-(N+1/2)}^{(N+1/2)} \left(\frac{1+e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} \right) dy.$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet\ y>R \\ e^{-2\pi y}<e^{-2\pi R} \\ 1+e^{-2\pi y}<1+e^{-2\pi R} \\ \bullet\ e^{-2\pi y}<e^{-2\pi R} \\ 1-e^{-2\pi y}>1-e^{-2\pi R} \\ \dfrac{1}{1-e^{-2\pi y}}<\dfrac{1}{1-e^{-2\pi R}} \end{array}\right]$$

$$\leq \underbrace{\frac{\pi M}{((N+1/2)^2+R^2)^{p/2}}\,2(N+1/2)}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0} \left(\frac{e^{-2\pi R}+1}{1-e^{-2\pi R}} \right)$$

pues $p>1$.

$$\therefore \lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_2} g = 0$$

y $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_4} g = 0$ (análogo al caso anterior)

$$\therefore \lim_{N\to\infty} \oint_{C_N} g = 0.$$

ii) Pruebe que: $\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq p_j}}^{\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{Res}\left(\pi\cot(\pi z) f(z), p_j\right).$

Sol: Obs: g tiene por candidatos a polos a:

- $\mathbb{Z}$ (que se los aporta $\cot(\pi z)$)
- $\{p_1, \dots, p_\ell\}$ (que se los aporta f).

además estos 2 conjuntos no tienen por que ser disjuntos!!

Pero podemos escribir la unión disjunta:

$$\left(\mathbb{Z} \setminus \{p_1, \dots, p_\ell\}\right) \dot\cup \{p_1, \dots, p_\ell\}$$

Entonces: $\displaystyle\oint_{C_N} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq p_j \\ |n|\leq N}} \operatorname{Res}(g, n) + 2\pi i \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{Res}(g, p_j).$ $\forall j\in\{1 \dots \ell\}$

(Recordar que estamos tomando N grande como en la parte anterior)

pero
$$\operatorname{Res}(g, n) = \lim_{z\to n} \frac{f(z)\,\pi\cos(\pi z)(z-n)}{\pi\operatorname{sen}(\pi z)}$$
$$= \lim_{z\to n} f(z) \frac{\pi\cos(\pi z)}{\pi} \underbrace{\frac{\pi(z-n)}{\operatorname{sen}(\pi(z-n))}}_{\to 1}$$
$$= \lim_{z\to n} f(z) = f(n) \quad \text{(por continuidad de } f\text{)}.$$

tomando límite obtenemos: $\displaystyle 0 = 2\pi i \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq p_j \\ \forall j\in\{1 \dots p\}}} f(n) + 2\pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z), p_j).$

iii) tomemos $f(z) = \frac{1}{z^2}$

Obs: f cumple todas las hipótesis del problema.

además • 0 es polo de orden 2 de f ‖ y es su único polo.
• 0 es polo de orden 3 de g !!

En efecto:

$$\lim_{z \to 0} \pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2} z^3 = \lim_{z \to 0} \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} z = 1 \neq 0.$$

• por ii) sabemos que: $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^2} = -\operatorname{Res}\left(\pi \frac{\cot(\pi z)}{z^2}, 0\right)$

pero: $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

calculemos el residuo: (orden 3!!)

Obs: el límite $\lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{\pi \cot(\pi z) z^3}{z^2} \right\}$ es largo de calcular

(creo que después de derivar 2 veces hay que calcular el límite como con 4 L'Hôpital's.)

mejor alternativa:

1) Expandir $\cot(\pi z)$ en serie de Taylor centrada en 0: $\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi z}\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} - \frac{\pi^4 z^4}{45} + \dots\right)$

2) Calcular $\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \pi \frac{1}{\pi z} \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{3} z^2 - \dots\right)$

y considerar el coeficiente de la potencia -1 (definición de residuo), que es, en este caso: $-\pi^2/3$ ... y concluir ....