

Guía de Problemas #3

Variable Compleja

PROFESOR: CARLOS CONCA

AUXILIARES: JOSÉ LUIS GONZÁLEZ, LILIAN ROCHA, MAURICIO SOTO G.

P1.- (a) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

(b) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.

P2.- Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

(a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

(b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

(c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

(d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

P3.- Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$

P4.- (a) Sabiendo que la serie $S(z) = \sum c_k (z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R_0 > 0$, determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\sum c_k (z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k} (z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2 (z - z_0)^k.$$

- (b) Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:

$$\sum z^k, \quad \sum \frac{z^k}{k}, \quad \sum \frac{z^k}{k^2}.$$

P5.- Calcule el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

P6.- Para las siguientes series, calcule el radio de convergencia y su valor donde corresponda:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$
 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$

P7.- Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $p^\lambda : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \neq 0.$$

- (i) Muestre que $p^i(i) = e^{-\pi/2}$ y que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p^k(z) = z^k$.
 (ii) Dado $\lambda = \alpha + i\beta$, pruebe que para todo $t > 0$ real,

$$p^\lambda(t) = t^\alpha [\cos(\beta \log t) + i \sin(\beta \log t)].$$

- (iii) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde $p^\lambda(z)$ es holomorfa y pruebe que

$$(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z).$$

Nota: todo lo anterior justifica que la función $p^\lambda(z)$ se llame función potencia generalizada y que se denote más

simplemente por z^λ . Así, en (i) se probó que $i^i = e^{-\pi/2}$.

P8.- Sea $S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n$, $T_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$.

- (a) Mostrar que $S_n = \frac{(T_n - nz^{n+1})}{1-z}$
 (b) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ y usando (a) calcule la suma de dicha serie.

P9.- Calcule el valor de las siguientes integrales:

- (i) $\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1} dx$
 (ii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$
 (iii) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)} d\theta$
 (iv) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)} d\theta$
 (v) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin(\pi x)}{x^2+2x+5} dx$
 (vi) $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx \quad m > 0$
 (vii) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$

P10.- Pruebe que para $b \in]-1, 1[$ se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Integre $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

P11.- Pruebe que:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}, \quad \text{donde } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Indicación: Considere la función $f(z) = \frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi z)}{(z+a)^2}$ integrada en el camino Γ_N correspondiente al borde del cuadrado de vértices $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$

P12.- Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

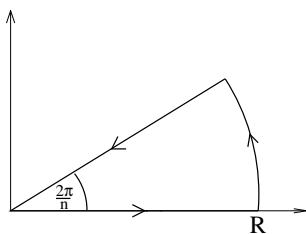
$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

P13.- (a) Calcule $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

Indicación: Considere el camino de la figura:



(b) Determine los radios de convergencia de las series siguientes:

$$(i) \sum (\log n)^2 z^n \quad (ii) \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} z^n$$

P14.- Es sabido que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente. El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de dicha serie haciendo uso de la teoría de variable compleja. Para ello considere el borde del cuadrado C_N de vértices:

$(N + \frac{1}{2})(-1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$, $(N + \frac{1}{2})(-1 + i)$, con $N \in \mathbb{N}$.

(i) Considere la función $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$. Indique dónde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine los órdenes correspondientes.

- (ii) Calcule los residuos de los polos de f .
- (iii) Calculando $\oint_{\partial C_N} f(z) dz$, concluya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Indicación: Use (sin demostrar) que existe M , independiente de N , tal que $|\cot \pi z| < M$
 $\forall z \in \partial C_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$

P15.- (a) Sea

$$f: D(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{1+z+z^2}$$

(i) Pruebe que

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z - e^{\frac{i\pi}{3}}} - \frac{1}{z - e^{-\frac{i\pi}{3}}} \right)$$

(ii) Deduzca que

$$f(z) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)z + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)z^2 + \dots \right)$$

(b) Calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} z^n$$

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n + 2} \right) z^n$$

P16.- (a) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{5 - 4\cos(t)} dt$$

(Ind: Recuerde que la extensión a \mathbb{C} de las funciones trigonométricas es:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2})$$

(b) Demuestre que:

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{16}$$

$$(ii) \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi e^{-2}}{2}$$