

Guía de ejercicios # 2 - MA26B Matemáticas Aplicadas

Variable Compleja

Semestre 2004-2

Auxiliares: R. Aliaga, G. Dávila, M. Duarte, M. Rojo

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

Derivación

1. Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

$$i) f(z) = \bar{z}, \quad ii) f(z) = e^x(\cos y - i \sin y), \quad iii) f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y), \quad iv) f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos y + i \sin y),$$

y calcule su derivada ($z = x + iy$).

2. a) Sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g = u + iv$ holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, pruebe que $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω .

b) Dados $u(x, y) = x \sin(x) \cosh(y) - y \cos(x) \sinh(y)$, encuentre $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ entonces $f'(z_0) = 0$.

4. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante, entonces f también lo es. Diga por qué es importante que Ω sea conexo.

5. Dado λ en \mathbb{C} definimos $p^\lambda : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante:

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \neq 0$$

(i) Muestre que $p^i(i) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ y que para todo $k \in \mathbb{Z}, p^k(z) = z^k$.

(ii) Dado $\lambda = \alpha + i\beta$, pruebe que para todo $t > 0$ real

$$p^\lambda(t) = t^\alpha [\cos(\beta \log(t)) + i \sin(\beta \log(t))]$$

(iii) Dados λ, μ en \mathbb{C} , verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde p^λ es holomorfa y pruebe que:

$$(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z)$$

6. Pruebe que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $z = x, iy$, definida por:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

es continua y satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en el origen, aunque $f'(0)$ no existe.

7. Si definimos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $f(0) = 0$ y $f(z) = \frac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}$ para $z \neq 0$, pruebe que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$, $z \rightarrow 0$ existe sobre cualquier camino radial, pero no cuando $z \rightarrow 0$ por cualquier camino.

8. Si $f(z)$ es una función de clase $C^2(\mathbb{C})$, pruebe que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log |f'(z)| = 0.$$

Si $|f'(z)|$ es el producto de una función de x y una función de y muestre que

$$f'(z) = \exp(\alpha z^2 + \beta z + \gamma),$$

donde α , β y γ son constantes complejas.

Series de potencia

9. Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$, $T_n(z) = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$.

a) Mostrar que $S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z}$.

b) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ y usando (a) calcule la suma de dicha serie.

10. Determine los radios de convergencia de las series siguientes:

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n))^2 x^n, \quad ii) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} x^n.$$

11. Sabiendo que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ es R (donde $0 \leq R \leq +\infty$), estudia los radios de convergencia de:

$$i) \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n}(z-z_0)^n, \quad ii) \sum_{n=0}^{+\infty} c_{kn}(z-z_0)^n, \quad iii) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{2n}, \quad iv) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{kn}.$$

12. Pruebe que la función

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!} z^n$$

es holomorfa en $|z| < 1$ y que su derivada es $af(z)/(1+z)$. Deduzca de aquí que $f(z) = (1+z)^a$.

Integración

13. Calcule directamente

$$\int_{[0, z_0]} \operatorname{Re}(z) dz, \quad \int_{[0, z_0]} \operatorname{Im}(z) dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}, \quad \int_{|z|=1} \bar{z}^n dz.$$

14. Calcule $\int_{\gamma} \frac{|z|}{|R-z|^2} |dz|$ donde γ es la circunferencia de radio r , $0 < r < R$, y centro el origen.

Indicación: Pruebe previamente que si $0 \leq r < R$, se tiene:

$$\frac{1}{R^2 - 2rR \cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos(nt) \right)$$

y use que $\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n$ converge a $\frac{\rho}{1-\rho}$ uniformemente en $|\rho| \leq a$, para todo $0 < a < 1$.

15. Dada la función $f(z)$, holomorfa en $|z-a| < R$; pruebe que, si $0 < r < R$,

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} d\theta,$$

donde $P(\theta)$ es la parte real de $f(a + re^{i\theta})$.

16. Usando la representación integral de $f^{(n)}(a)$ dada por la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada que encierra el origen. De aquí pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x \cos \theta} d\theta.$$

Residuos

17. Considere la función

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 1)(z - i)(z^2 - 2z + 2)}$$

a) Determine los polos de f , el orden de cada uno de ellos y calcule el valor de los correspondientes residuos.

b) Sea $R > 0$ y C_R la circunferencia de radio R y centro en el origen recorrida en sentido antihorario. Determine los valores de R tal que la integral

$$I(R) = \int_{C_R} f(z) dz$$

existe y calcule su valor en función de R .

18. Encuentre las singularidades, y de qué tipo son, de la función $\frac{1}{z(e^z - 1)}$. Muestre que, si $0 < |z| < 2\pi$, la función puede ser expresada en la forma

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

y encuentre los valores de a_0 y a_2 .

19. Calcule $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}} dx$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

Indicación: Considere el camino desde el origen a R , luego a $Re^{i\frac{\pi}{n}}$ y luego de vuelta al origen.

20. Pruebe que a)

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

b)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a})$$

donde $a > 0$.

21. Pruebe que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}$$

donde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Hint: Considere la función $f(z) = \frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi z)}{(z+a)^2}$ integrada en el camino Γ_N correspondiente al borde del cuadrado con vértices $(N + \frac{1}{2})(\pm i \pm 1)$.

22. a) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{5 - 4\cos(t)} dt$$

b) Demuestre que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx &= \frac{\pi}{16} \\ \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

23. Considere el borde del cuadrado C_N de vértices:

$$(N + \frac{1}{2})(-1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 + i), (N + \frac{1}{2})(-1 + i),$$

con $N \in \mathbb{N}$.

a) Considere la función $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$. Indique donde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine los órdenes correspondientes.

b) Calcule los residuos de los polos de f .

c) Calculando $\oint_{\partial C_N} f(z) dz$ concluya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

24. Integrando en un cuadrado cuyas esquinas son $\pm N$, $\pm N + 2Ni$, donde N es un entero, y haciendo $N \rightarrow \infty$, pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2) \cosh(\frac{1}{2}\pi x)} dx = \log 2.$$

25. Integrando $\frac{\pi \operatorname{sen}(az)}{z^3 \operatorname{sen}(\pi z)}$ sobre un contorno adecuado, pruebe que:

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

.

Otros

26. Muestre que, si θ es real y $\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi = 1$, entonces

$$\phi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \log \cot \frac{1}{2}(n\pi + \theta)$$

donde n es un entero, par o impar, dependiendo de si $\operatorname{sen} \theta > 0$ o $\operatorname{sen} \theta < 0$.

Indicación. Si $\phi = a + ib$, tenemos $\operatorname{sen} a \cosh b = \operatorname{cosec} \theta$, $\cos a \sinh b = 0$, resuelva para a y b .