

GUIA 5 - MA26B

T. de Residuos e Integrales;
Series de Fourier;
Separación de Variables

Auxiliares: Paulina Herrera & Juan Mayorga

- I) Explique por qué el residuo en un polo simple no puede ser cero.
II) Sea $p \in \mathbb{C}$ un polo de $g = g(z)$ y de $h = h(z)$. Pruebe que

$$\text{Res}(g + h, p) = \text{Res}(g, p) + \text{Res}(h, p).$$

- III) Sea $p \in \mathbb{C}$ un polo de $f(z) = g(z)/h(z)$. Supongamos que g y h son funciones holomorfas en una vecindad de p tales que

$$g(p) \neq 0, \quad h(p) = h'(p) = 0, \quad h''(p) \neq 0.$$

Verifique que necesariamente $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en p y que

$$\text{Res}(f, p) = \frac{2g'(p)}{h''(p)} - \frac{2g'(p)h'''(p)}{3h''(p)^2}.$$

- IV) Pruebe que

- a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}(t)}{5-4\text{sen}(t)} dt = \frac{\pi}{6}$;
b) $\int_0^\infty \frac{\ln t}{(1+t^2)^{n+1}} dt = -\frac{n\pi}{4}$, si $n \in \{1, 2\}$;
c) si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n - m \geq 2$,

$$\int_0^\infty \frac{t^m}{1+t^n} dt = \frac{\pi}{n \text{sen}(\frac{\pi(m+1)}{n})}.$$

- V) Calcule $\int_I f_a(t) dt$ ($a \in \mathbb{R}$ es un parámetro) cuando

- a) $f_a(t) = \frac{1}{a+\cos(t)}$, con $I = [0, 2\pi]$ y $a > 1$.
Resp. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
b) $f_a(t) = \frac{\cos^2(3t)}{1-2a\cos(2t)+a^2}$, con $I = [0, 2\pi]$ y $0 < a < 1$.
Resp. $\pi \frac{1-a+a^2}{1-a}$.
c) $f_a(t) = \frac{\cos(nt)}{\cosh(a)+\cos(t)}$, con $I = [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ y $0 < a$.
Resp. $2\pi(-1)^n \frac{e^{-na}}{\text{senh}(a)}$.
d) $f_a(t) = \frac{t \text{sen}(t)}{t^2+a^2}$, con $I = [0, \infty[$ y $0 < a$.
Resp. $\frac{\pi}{2} e^{-a}$.
e) $f_{a,\lambda}(t) = \frac{\cos(\lambda t)}{t^2+a^2}$, con $I = [0, \infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < a$.
Resp. $\frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}$.
f) $f_a(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t(t^2+a^2)}$, con $I = [0, \infty[$ y $0 < a$.
Resp. $\frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a})$.
g) $f_a(t) = \frac{t^{a-1}}{1+t}$, con $I = [0, \infty[$ y $0 < a < 1$.

VI) Mediante series de Fourier, calcule el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Sugerencia: Considere la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

VII) Pruebe que la fórmula

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin\left(\frac{k\pi s}{l}\right) ds \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t},$$

proporciona una solución para

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \alpha u_{xx}, & \forall t > 0, x \in [0, l], \\ u(0, x) = f(x), & \forall x \in [0, l], \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, & \forall t > 0, \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro.

VIII) Pruebe que la fórmula

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(s) \cos\left(\frac{k\pi s}{l}\right) ds \right] \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t},$$

proporciona una solución para

$$(2) \quad \begin{cases} u_t = \alpha u_{xx}, & \forall t > 0, x \in [0, l], \\ u(0, x) = f(x), & \forall x \in]0, l[, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0, & \forall t > 0, \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro.

IX) Pruebe que la fórmula

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin\left(\frac{k\pi s}{l}\right) ds \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{k\pi y}{l}},$$

proporciona una solución para

$$(3) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \forall y > 0, x \in [0, l], \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in]0, l[, \\ u(0, y) = u(l, y) = 0, & \forall y > 0, \\ u(x, \infty) = 0, & \forall x \in]0, l[. \end{cases}$$

X) Sean $\gamma > 0$ y $R = [0, a] \times [0, b]$. Considere el problema

$$(4) \quad \begin{cases} u_{tt} = \gamma^2(u_{xx} + u_{yy}), & \forall t > 0, (x, y) \in R, \\ u(t, x, y) = 0, & \forall t > 0, (x, y) \in \partial R, \\ u(0, x, y) = f(x, y), & \forall (x, y) \in R, \\ u_t(0, x, y) = g(x, y), & \forall (x, y) \in R. \end{cases}$$

Muestre que la solución general es

$$u(t, x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi y}{b}\right) [\alpha_{ij} \operatorname{sen}(w_{ij}t) + \beta_{ij} \operatorname{sen}(w_{ij}t)],$$

donde

$$w_{ij} = \gamma\pi \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2},$$

$$\beta_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dy dx.$$

$$\alpha_{ij} = \frac{4}{abw_{ij}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dy dx,$$

XI) Resuelva el problema

$$(5) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = 0, & \forall x \in [0, 1], y \in [0, 2], \\ u(x, 0) = 0, & \forall x \in [0, 1], \\ u(x, 2) = x(1 - x), & \forall x \in [0, 1], \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & \forall y \in [0, 2]. \end{cases}$$

XII) Resuelva el problema

$$(6) \quad \begin{cases} u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & \forall t > 0, (x, y, z) \in]0, \pi[^3, \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y), & \forall (x, y, z) \in]0, \pi[^3, \\ u(0, y, z, t) = u(\pi, y, z, t) = u(x, y, \pi, t) = 0, & \forall t > 0, (x, y, z) \in]0, \pi[^3, \\ u_y(x, 0, z, t) = u_y(x, \pi, z, t) = 0, & \forall t > 0, (x, y, z) \in]0, \pi[^3. \end{cases}$$