



■ FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: →

* DEFINICIÓN: → $(\forall (x,y), (u,v) \in \mathbb{C}) \Rightarrow (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$
 $(x,y) \cdot (u,v) = (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$

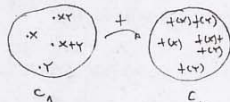
* TEOREMA: → La Terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo; $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano; (\mathbb{C}, \cdot) es un grupo abeliano distinto de cero.

* DEFINICIÓN: → $\bar{z} - w = \bar{z} + (-w) \quad (\forall z, w \in \mathbb{C})$
 $\frac{\bar{z}}{w} = \bar{z} \cdot w^{-1} \quad (w \neq 0)$
 Sea $z = (x,y)$ un número complejo cualesquiera de \mathbb{C} , llamamos $x = \text{parte real } z = \text{Re } z$
 $y = \text{parte imag } z = \text{Im } z$

* DEFINICIÓN: → Multiplicación de un escalar por un número complejo cualquiera.
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha z = \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

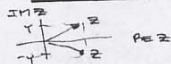
* PROPIEDADES: → $(\forall z, w \in \mathbb{C}) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
 1° $(\alpha\beta)z = \alpha(\beta z) \quad 2^\circ \alpha(z+w) = \alpha z + \alpha w$
 3° $(\alpha+\beta)z = \alpha z + \beta z \quad 4^\circ 1 \cdot z = z$

* DEFINICIÓN: → Se dice que un campo $(C_1, +, \cdot)$ es isomorfo al $(C_2, +, \cdot)$ si existe una biyección f de C_1 en C_2 tal que $f(x,y) = f(x) \oplus f(y) \quad \forall (x,y) \in C_1$
 $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$



* TEOREMA: → Sea $\mathbb{C}^* = \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x \neq 0\}$, se cumple que \mathbb{C}^* es isomorfo en \mathbb{R}

* DEFINICIÓN: → $z \in \mathbb{C}$ conjugado de un número complejo $z = (x,y) \neq 0$ es $\bar{z} = (x, -y)$



* DEFINICIÓN: → Módulo de un número complejo si $z = (x,y) \neq 0$ el módulo de $z = (x,y) \neq 0$ es el número real positivo designado por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$



PROPIEDADES DE LA CONJUGACIÓN Y MÓDULO (\mathbb{C})

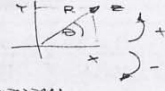
- | | | |
|---|---|---|
| 1° $\bar{\bar{z}} = z$ | 6° $z \cdot \bar{z} = z ^2$ | 9° $ zw = z w $ |
| 2° $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ | 7° $0 \leq z \leq z ; \text{Im } z \leq z $ | 10° $ \frac{z}{w} = \frac{ z }{ w }$ |
| 3° $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ | 8° $z=0 \Rightarrow z =0$ | 11° $(\frac{z}{w}) = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ |
| 4° $z + \bar{z} = 2\text{Re } z$ | 5° $ z = \bar{z} $ | 12° $ z+w \leq z + w $ Desigualdad Δ |
| | | $ \sum_{i=1}^n z_i \leq \sum_{i=1}^n z_i $ |

* MÉTRICA DE \mathbb{C} (MÉTRICA EUCLIDIANA): →

Sea $\lambda: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(z,w) = |z-w|$. SATISFACE LOS AXIOMAS DE MÉTRICA:
 1° $d(z,w) \geq 0, d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$
 2° $d(z,w) = d(w,z)$
 3° $d(z,w) \leq d(z,0) + d(0,w)$ Desig. Δ x
 $\therefore (\mathbb{C}, d)$ ES ESPACIO MÉTRICO



Forma polar o Trigonométrica de un número complejo: →



* Sea $z = x + iy \neq 0$ $\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$ $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ SE OBTIENE EN GRADOS $\theta = \phi + 2k\pi$ ($0 \leq \phi < 2\pi$)
 $\theta = \text{ARG } z$ $\text{ARG } z = \phi$

* USO $\boxed{\text{ARG } z = \text{ARG } z + 2k\pi}$

* $R = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (LONGITUD DEL VECTOR z)

* EN COORDENADAS POLARES: 1° SE USA LA MAGNITUD DEL COMPLEJO z
 2° SE DET. $\theta = \arctan \frac{y}{x}$; 3° SE OBTIENE $R = |z|$

ej: $z = 1 - i$ $\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = -\pi/4$ $\wedge R = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $\therefore z = \sqrt{2} \text{ cis } (-\pi/4)$

Forma Exponencial de un número complejo: →

$z = R e^{i\theta}$ ($z \neq 0$) $\Rightarrow R e^{i\theta} = R \cos \theta + i R \sin \theta$ (Fórmula de Euler)
 EN DESARROLLO DE TAYLOR: $\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$ $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$
 $\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$ $\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$ *

Producto y cociente de números complejos representados en forma polar y Exponencial: →

[A] FORMA POLAR: * PRODUCTO $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (R_1 \text{ cis } \theta_1)(R_2 \text{ cis } \theta_2) = R_1 R_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$
 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\wedge \text{ARG}(z_1 \cdot z_2) = \text{ARG}(z_1) + \text{ARG}(z_2)$ *

* COCIENTE $\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \text{ cis } \theta_1}{R_2 \text{ cis } \theta_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \text{ cis } (\theta_1 - \theta_2)$
 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\wedge \text{ARG}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{ARG}(z_1) - \text{ARG}(z_2)$ *

[B] FORMA EXPONENCIAL: * PRODUCTO $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (R_1 e^{i\theta_1})(R_2 e^{i\theta_2}) = R_1 R_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ *

* COCIENTE $\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 e^{i\theta_1}}{R_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ *

[Definición] $\rightarrow e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Potenciación de números complejos: →

Sea $z = R \text{ cis } \theta$ ($z \neq 0$) $\wedge n \in \mathbb{N}$ USO $z^n = (R \text{ cis } \theta)^n = R^n \text{ cis } n\theta = R^n \text{ cis } \phi$ *
 $\boxed{\text{ARG } z^n = n \text{ ARG } z}$ *

Fórmula de De Moivre: →

$\boxed{\text{cis } \theta^n = \text{cis } n\theta}$ *
 $\boxed{z^n = (R e^{i\theta})^n = R^n (e^{i\theta})^n = R^n e^{in\theta}}$ *



Propiedades de la Fórmula de De Moivre: \rightarrow

$$\text{SEA } \begin{aligned} p &= \cos \theta + i \sin \theta & p^n &= \cos n\theta + i \sin n\theta \\ q &= \cos \theta - i \sin \theta & q^n &= \cos n\theta - i \sin n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p+q &= 2 \cos \theta & p \cdot q &= 1 & q^n \cdot p^n &= 1 \\ p-q &= 2i \sin \theta & p^n + q^n &= 2 \cos n\theta & p^n - q^n &= 2i \sin n\theta \end{aligned}$$

estas formulas permiten desarrollar $\cos^n \theta$ a $\cos^n \theta$ en términos de senos y cosenos del ángulo θ .

Aplicación de Números Complejos: \rightarrow

SEA $z = R \text{ cis } \theta$ UN NÚMERO COMPLEJO CUALQUIERA NO NULO A $n \in \mathbb{N}$, ENTONCES

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R} \text{ cis } \frac{\theta}{n} = \sqrt[n]{R} \text{ cis } \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\text{ADQ } \sqrt[n]{z} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \left(\frac{\cos \theta}{n} \right) + i \left(\frac{\sin \theta}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

GEOMÉTRICA, LA LONGITUD DE CADA UNO DE SUS RAÍCES ES CTE Y VALOR $\sqrt[n]{R}$ A SUS ARGUMENTOS SE OBTIENEN SUMANDO MÚLTIPLOS DE $\frac{2\pi}{n}$ AL ÁNGULO $\frac{\theta}{n}$. HAY n RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO CORRESPONDE A LOS VERTICES DE UN POLÍGONO REGULAR DE n LADOS.

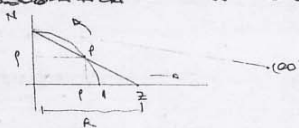
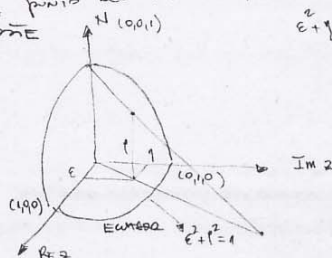
Topología del plano complejo:

* **VECINDAD DE UN PUNTO:** \rightarrow VECINDAD DE UN PUNTO $z_0 \in \mathbb{C}$ A TODO CONJUNTO V QUE CONTIENE A UN CÍRCULO: $V_\epsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon \}$ DE CENTRO z_0 A RADIO $\epsilon > 0$ (NOTA: SE DEFINEN VARIOS CONCEPTOS)

- **TEOREMA DE BOLZANO - WEIERSTRASS:** \rightarrow UN CONJUNTO $S \subset \mathbb{C}$ ES COMPACTO SI Y SOLO SI TODO CONJUNTO DE S DE UN NÚMERO INFINITO DE PUNTOS TIENE UN PUNTO DE ACUMULACIÓN EN S .

* **PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA:** \rightarrow LA ESFERA DE RIEMANN CON CENTRO EL ORIGEN DEL CONJUNTO DE LOS COMPLEJOS Y UNO ECUADOR ESTÁ EN ESTE CONJUNTO. SE PUEDE ESTABLECER UNA CORRESPONDENCIA BIUNIVOCAL ENTRE LOS PÍOS DEL PLANO COMPLEJO Y LOS PUNTOS DE LA ESFERA UNIDAD, POR LO QUE SE PUEDE VER EL COMPLEJO \mathbb{C} CON EL POLO NORTE Y DEFINIR UN PÍO P SOBRE ELLA QUE SE LLAMA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA DEL COMPLEJO \mathbb{C} . LOS PÍOS FUERA DEL ECUADOR SON PROY. EST. EN LA HEMISFERA 1 LOS DEL INTERIOR EN LA HEM. SUR.

EL POLO NORTE NO ESTÁ ASOCIADO A NINGÚN NÚMERO COMPLEJO. EXISTE UN NÚMERO COMPLEJO QUE SE LLAMA PUNTO DEL INFINITO, EN QUE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA LÍNCIE CON EL POLO NORTE.



SE OBTIENE QUE:

$$\begin{aligned} \frac{E}{X} = \frac{Y}{Y} = \frac{P}{R} = \frac{1-P}{1} & \Rightarrow \begin{aligned} X &= \frac{E}{1-P} & Y &= \frac{2P}{R^2+1} \\ Y &= \frac{P}{1-P} & P &= \frac{R^2-1}{R^2+1} \\ E &= \frac{2X}{R^2+1} & & \end{aligned} \end{aligned}$$



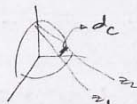
* NOTA: → Si al punto complejo z acercamos a punto del infinito (∞), tenemos el llamado punto complejo extendido ∞ . Se cumple $\forall z \neq \infty$

- (a) $z + \infty = \infty + z = \infty$ (b) $\frac{z}{\infty} = 0$ ($z \neq 0$)
- (c) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$
- (d) $\frac{\infty}{\infty} = 0$ ($z \neq \infty$)

* VEICINIDAD DE CENTRO AL PUNTO DEL INFINITO ∞ A RADIO $\frac{1}{\epsilon}$ ($\epsilon > 0$)

$$V_{\frac{1}{\epsilon}}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\epsilon}\}$$

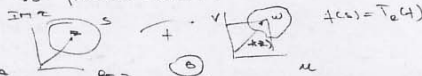
* DEFINICIÓN DE DISTANCIA COMPLEJA: Sean $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ complejos no nulos y $A_1(E_1, \theta_1)$ y $A_2(E_2, \theta_2)$ sus proyecciones ortogonales en la misma unidad de Poincaré. Se define por la distancia compleja (d_c)



* FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: →

Toda aplicación f de un subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ a \mathbb{C} , se pasa $f: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se llama función de variable compleja f no confundir con el concepto de dominio complejo. Si $z \in S$ entonces $f(z)$ es un complejo que se puede escribir como:

$$w = f(z) = u(z) + i v(z)$$



UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA ES:

DEFINIDA POR

$$G(f) = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \forall z \in S \subset \mathbb{C}\} \quad \text{No representable geom. } \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$$

PARO LA TRAZA DE LA FUNCIÓN f DE VARIABLE COMPLEJA SE RESUME POR

$$T_f(f) = \{f(z) \in \mathbb{C} \mid z \in S \subset \mathbb{C}\} \quad \text{ES REPRESENTABLE}$$

* EJEMPLOS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA:

1°) FUNCIÓN POLINOMIAL DE GRADO n , SE DEFINE POR:

$$f: z \mapsto P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad \text{con } (a_n \neq 0) \text{ y } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

2°) FUNCIÓN RACIONAL: COCIENTE DE POLINOMIOS

$$z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (Q(z) \neq 0)$$

I - CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA:

SEA $f: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA. A GUN $z_0 \in \mathbb{C}$ UN PUNTO DE ACUMULACIÓN DE S A BUN PUNTO DE \mathbb{C} .

* DEFINICIÓN: SE DICE QUE b ES EL LÍMITE DE f EN z_0 Y ESCRIBIMOS $\lim_{z \rightarrow z_0} f = b$ SI ($\forall \epsilon > 0$)

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 \mid 0 < |z - z_0| < \delta \wedge z \in S \Rightarrow |f(z) - b| < \epsilon \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - b| < \epsilon$$

NOTA: → 1°) $\lim_{z \rightarrow \infty} f = b$ 2°) $\lim_{z \rightarrow \infty} f = \infty$

$$3°) \lim_{z \rightarrow z_0} f = \infty$$



* Temáticas básicas sobre límites

A - Sea $f = u + i v$ una función de variable compleja definida en $S \subset \mathbb{C}$,
 $z_0 = x_0 + i y_0$ es un punto de acumulación de S y $w = u_0 + i v_0$ es un complejo.
 Fijado entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0 \quad \text{2) y 3) se pueden escribir como}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \lim_{z \rightarrow z_0} f \quad (2') \quad \wedge \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \lim_{z \rightarrow z_0} f \quad (3')$$

B - Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f = w_0$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g = w_0$ entonces \exists límites de $f+g, f-g, f \cdot g, f/g$

$$\begin{aligned} * \lim_{z \rightarrow z_0} (f+g) &= w_0 + w_0 & * \lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g) &= w_0 \cdot w_0 & * \lim_{z \rightarrow z_0} (f/g) &= \frac{w_0}{w_0} \quad (w_0 \neq 0) \end{aligned}$$