Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA2A2 Calculo Avanzado y Aplicaciones 2008

Profesor: Roberto Cominetti
Profesor Auxiliar: Omar Larré, Andrés Fielbaum

1. Calcule directamente la integral de flujo $\int\int_\Sigma \nabla F \cdot \overrightarrow{dA}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ orientado según la normal interior del casquete, con $F(x,y,z)=(x-1)^2+2(y-1)^2+z^2$.
Indicación: Una parametrización útil es

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \qquad \varphi\in[0,\pi/2],\ \ \theta\in[0,2\pi] \\ z = c\cos\varphi \end{cases}$$

es decir $\overrightarrow{r}(\varphi,\theta)=a\sin\varphi\cos\theta\widehat{\imath}+b\sin\varphi\sin\theta\widehat{\jmath}+c\cos\varphi\widehat{k}$.

Solución:

Calculamos los vectores tangentes a la curva:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi} &= a\cos\varphi\cos\theta\widehat{\imath}+b\cos\varphi\sin\theta\widehat{\jmath}-c\sin\varphi\widehat{k}\\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} &= -a\sin\varphi\sin\theta\widehat{\imath}+b\sin\varphi\cos\theta\widehat{\jmath}\end{aligned}$$

entonces la integral de superfice queda:

$$\int\int_\Sigma \nabla F\cdot\overrightarrow{dA}=\int_{\varphi\in[0,\pi/2]}\int_{\theta\in[0,2\pi]}\nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi,\theta))\cdot\frac{\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}\right\|}\left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}\right\|d\theta d\varphi$$

Acá podemos simplificar las expresiones con los módulos:

$$\int\int_\Sigma \nabla F\cdot\overrightarrow{dA}=\int_{\varphi\in[0,\pi/2]}\int_{\theta\in[0,2\pi]}\nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi,\theta))\cdot\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}\right)d\theta d\varphi$$

Ahora debemos calcular $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi} &= (-a\sin\varphi\sin\theta\widehat{\imath}+b\sin\varphi\cos\theta\widehat{\jmath})\times(a\cos\varphi\cos\theta\widehat{\imath}+b\cos\varphi\sin\theta\widehat{\jmath}-c\sin\varphi\widehat{k})\\ &= \begin{pmatrix}-a\sin\varphi\sin\theta\\ b\sin\varphi\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\cos\varphi\cos\theta\\ b\cos\varphi\sin\theta\\ c\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-bc\cos\theta\sin^2\varphi\\ -ac\sin\theta\sin^2\varphi\\ -ab\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi-ab\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hay que ver si $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}$ es un vector normal interior, para lo cual evaluamos en $\theta=0$ y $\varphi=\pi/2$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}(\theta=0,\varphi=\pi/2)\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}(\theta=0,\varphi=\pi/2)=-bc\widehat{\imath}$$

con lo cual obtenemos que si es interior!

Como $\nabla F(x,y,z)=(2(x-1),4(y-1),2z)=2(x-1,2(y-1),z)$ entonces si expresamos este resultados en coordenadas elipsoidales:

$$\nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi,\theta))=2(a\sin\varphi\cos\theta-1,2(b\sin\varphi\sin\theta-1),c\cos\varphi)$$

Con todo lo anterior:

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \varphi} \right) d\theta d\varphi \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(a \sin\varphi \cos\theta - 1) \\ 4(b \sin\varphi \sin\theta - 1) \\ 2c\cos\varphi \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -bc\cos\theta \sin^2\varphi \\ -ac \sin\theta \sin^2\varphi \\ -ab\cos^2\theta \cos\varphi \sin\varphi - ab\sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(a \sin\varphi \cos\theta - 1) \\ 4(b \sin\varphi \sin\theta - 1) \\ 2c\cos\varphi \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -bc\cos\theta \sin^2\varphi \\ -ac \sin\theta \sin^2\varphi \\ -ab\cos\varphi \sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2abc\cos^2\theta \sin^3\varphi + 2bc\cos\theta \sin^2\varphi - 4abc\sin^2\theta \sin^3\varphi \\ +4ac\sin\theta \sin^2\varphi - 2cab\cos^2\varphi \sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
& \left[Notar\ que \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \right] \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (-2abc\cos^2\theta \sin^3\varphi - 4abc\sin^2\theta \sin^3\varphi - 2cab\cos^2\varphi \sin\varphi) d\theta d\varphi \\
= & -2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta \sin^3\varphi + 2\sin^2\theta \sin^3\varphi + \cos^2\varphi \sin\varphi) d\theta d\varphi \\
= & -2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \sin^3\varphi + 2\pi \sin^3\varphi + 2\pi\cos^2\varphi \sin\varphi) d\varphi \\
= & -2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\pi \sin^3\varphi + 2\pi\cos^2\varphi \sin\varphi) d\varphi \\
= & -2abc(3\pi\frac{2}{3} + 2\pi\frac{1}{3}) = -4\pi abc - \frac{4abc\pi}{3} = -\frac{16abc\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Obs.: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{2}{3}$, $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{3}$