

El teorema de la divergencia de Gauss

El operador divergencia

Consideremos un campo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase C^1 . Se define la divergencia como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

El teorema de la divergencia o de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una unión finita de superficies regulares.

El teorema de la divergencia o de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una unión finita de superficies regulares.

Sea \vec{F} un campo C^1 definido en unan vecindad de $\bar{\Omega}$.

El teorema de la divergencia o de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una unión finita de superficies regulares.

Sea \vec{F} un campo C^1 definido en unan vecindad de $\bar{\Omega}$.

Entonces

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

El teorema de la divergencia o de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una unión finita de superficies regulares.

Sea \vec{F} un campo C^1 definido en una vecindad de $\bar{\Omega}$.
Entonces

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

donde cada superficie de $\partial\Omega$ está orientada según la normal exterior a Ω .

El teorema de la divergencia o de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una unión finita de superficies regulares.

Sea \vec{F} un campo C^1 definido en una vecindad de $\bar{\Omega}$.
Entonces

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

donde cada superficie de $\partial\Omega$ está orientada según la normal exterior a Ω .

Observación: $\partial\Omega$ es automáticamente orientable.

El caso de un rectángulo

Supongamos que $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

El caso de un rectángulo

Supongamos que $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

Entonces

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right] dz \, dy \, dx$$

El caso de un rectángulo

Supongamos que $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

Entonces

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right] dz \, dy \, dx$$

Consideremos el último término. Usando el teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \, dy \, dx &= \int_a^b \int_c^d F_3(x, y, f) \, dy \, dx \\ &\quad - \int_a^b \int_c^d F_3(x, y, e) \, dy \, dx \end{aligned}$$

La integral

$$\int_a^b \int_c^d F_3(x, y, f) dy dx$$

puede verse como la integral de flujo

La integral

$$\int_a^b \int_c^d F_3(x, y, f) dy dx$$

puede verse como la integral de flujo

$$\int_a^b \int_c^d F_3(x, y, f) dy dx = \int \int_{S_{sup}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

donde S_{sup} es la “cara superior”:

$$S_{sup} = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, z = f\}.$$

Similarmente

$$- \int_a^b \int_c^d F_3(x, y, e) dy dx = \int \int_{S_{inf}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

donde S_{inf} es la “cara inferior”. (Notar el signo “-”).

Similarmente

$$- \int_a^b \int_c^d F_3(x, y, e) dy dx = \int \int_{S_{inf}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

donde S_{inf} es la “cara inferior”. (Notar el signo “-”).

Luego

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_3}{\partial z} dz dy dx = \int \int_{S_{sup}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \int \int_{S_{inf}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS.$$

Un cálculo análogo muestra que

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_2}{\partial y} dz dy dx = \int \int_{S_{izq}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \int \int_{S_{der}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS.$$

donde S_{izq} y S_{der} son las caras izquierda y derecha respectivamente, y

Un cálculo análogo muestra que

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_2}{\partial y} dz dy dx = \int \int_{S_{izq}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \int \int_{S_{der}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS.$$

donde S_{izq} y S_{der} son las caras izquierda y derecha respectivamente, y

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_1}{\partial x} dz dy dx = \int \int_{S_{ant}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \int \int_{S_{post}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS.$$

donde S_{ant} , S_{post} corresponden a la cara anterior y posterior.

Tomando en cuenta que

$$\partial\Omega = S_{sup} \cup S_{inf} \cup S_{izq} \cup S_{der} \cup S_{ant} \cup S_{post}$$

Tomando en cuenta que

$$\partial\Omega = S_{sup} \cup S_{inf} \cup S_{izq} \cup S_{der} \cup S_{ant} \cup S_{post}$$

se deduce que

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \operatorname{div} \vec{F} \, dz \, dy \, dx = \int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS.$$

div es invariante bajo rotaciones de los ejes

Escribamos $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum_{i=1}^3 F_i e_i$ donde e_1, e_2, e_3 forman la base canónica de \mathbb{R}^3 .

div es invariante bajo rotaciones de los ejes

Escribamos $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum_{i=1}^3 F_i e_i$ donde e_1, e_2, e_3 forman la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Consideremos una base ortonormal v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}^3 .

div es invariante bajo rotaciones de los ejes

Escribamos $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum_{i=1}^3 F_i e_i$ donde e_1, e_2, e_3 forman la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Consideremos una base ortonormal v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}^3 .

Entonces

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i v_i$$

donde

$$\tilde{F}_i = \langle \vec{F}, v_i \rangle$$

Introduzcamos el cambio de variables $x = Ry$ donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad R = [v_1, v_2, v_3] \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(R es de 3×3)

Introduzcamos el cambio de variables $x = Ry$ donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad R = [v_1, v_2, v_3] \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(R es de 3×3)

Entonces en las variables y y usando la base v_1, v_2, v_3 el campo se puede expresar como

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i(y)v_i \quad \tilde{F}_i(y) = \langle \vec{F}(Ry), v_i \rangle$$

Con la notación

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i(y) v_i \quad \tilde{F}_i(y) = \langle \vec{F}(Ry), v_i \rangle$$

se tiene

Con la notación

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i(y) v_i \quad \tilde{F}_i(y) = \langle \vec{F}(Ry), v_i \rangle$$

se tiene

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i}$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial F(Ry)}{\partial y_i}, v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, v_i \right\rangle$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial F(Ry)}{\partial y_i}, v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, v_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} R_{ji}, v_i \right\rangle \text{ (ya que } x_j = \sum_{i=1}^3 R_{ji} y_i \text{)}$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial F(Ry)}{\partial y_i}, v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, v_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} R_{ji}, v_i \right\rangle \quad (\text{ya que } x_j = \sum_{i=1}^3 R_{ji} y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ji} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \right\rangle$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ji} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \right\rangle$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ji} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 R_{ji} R_{ki} \right) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \right\rangle$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ji} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 R_{ji} R_{ki} \right) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{kj} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

ya que $R^T R = I = R R^T$.

Versión local del teorema de la divergencia

Se tiene que para cualquier $x_0 \in \bar{\Omega}$ existe un $R > 0$
(pequeño, que depende de x_0) tal que:

Versión local del teorema de la divergencia

Se tiene que para cualquier $x_0 \in \bar{\Omega}$ existe un $R > 0$ (pequeño, que depende de x_0) tal que:
si \vec{F} es un campo C^1 que se anula fuera de $B_R(x_0)$ entonces

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

El caso $x_0 \in \partial\Omega$

Rotando los ejes podemos suponer que $\hat{n}(x_0) = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$.

El caso $x_0 \in \partial\Omega$

Rotando los ejes podemos suponer que $\hat{n}(x_0) = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Usando la definición de superficie regular y el teorema de la función inversa, existe $R > 0$ tal que la superficie $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ es el grafo de funciones

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq 3$$

es decir

El caso $x_0 \in \partial\Omega$

Rotando los ejes podemos suponer que $\hat{n}(x_0) = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Usando la definición de superficie regular y el teorema de la función inversa, existe $R > 0$ tal que la superficie $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ es el grafo de funciones

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq 3$$

es decir

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap B_R(x_0) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \varphi_1(x_2, x_3), (x_2, x_3) \in U_1\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = \varphi_2(x_1, x_3), (x_1, x_3) \in U_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = \varphi_3(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in U_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= \int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right] dV. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= \int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\
&= \int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right] dV.
\end{aligned}$$

Veamos el último término: se puede elegir $0 < r < R$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$ entonces

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \, dV = \int \int_{U_3} \int_{\bar{x}_3}^{\varphi_3(x_1, x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \, dx_3 \, dx_1 \, dx_2$$

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dV &= \int \int_{U_3} \int_{\bar{x}_3}^{\varphi_3(x_1, x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 \\ &= \int \int_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dV &= \int \int_{U_3} \int_{\bar{x}_3}^{\varphi_3(x_1, x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 \\
 &= \int \int_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.
 \end{aligned}$$

Como $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ se puede parametrizar por $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2))$ tenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} = \left(-\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, 1 \right)$$

Luego, si \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$

$$\int \int_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} \, dS = \int \int_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) \, dx_1 \, dx_2.$$

Luego, si \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$

$$\int \int_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} \, dS = \int \int_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) \, dx_1 \, dx_2.$$

Se deduce que

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \, dV = \int \int_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} \, dS.$$

Luego, si \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$

$$\int \int_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} \, dS = \int \int_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) \, dx_1 \, dx_2.$$

Se deduce que

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \, dV = \int \int_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} \, dS.$$

Similarmente, utilizando la parametrización $\vec{r}(x_1, x_3) = (x_1, \varphi_2(x_1, x_3), x_3)$ se encuentra

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dV = \int \int_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

y también

Similarmente, utilizando la parametrización $\vec{r}(x_1, x_3) = (x_1, \varphi_2(x_1, x_3), x_3)$ se encuentra

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dV = \int \int_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

y también

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dV = \int \int_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

Similarmente, utilizando la parametrización $\vec{r}(x_1, x_3) = (x_1, \varphi_2(x_1, x_3), x_3)$ se encuentra

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dV = \int \int_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

y también

$$\int \int \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dV = \int \int_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

Sumando las fórmulas anteriores

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

El caso $x_0 \in \Omega$

En este caso basta encontrar un cubo Q de centro x_0 contenido en Ω y luego elegir $R > 0$ pequeño tal que $B_R(x_0) \subseteq Q$.

El caso $x_0 \in \Omega$

En este caso basta encontrar un cubo Q de centro x_0 contenido en Ω y luego elegir $R > 0$ pequeño tal que $B_R(x_0) \subseteq Q$.

Podemos aplicar entonces el cálculo en el caso de un cubo y obtener

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int \int \int_Q \operatorname{div} \vec{F} = \int \int_{\partial Q} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

Notar que

$$\int \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

Versión global

Tenemos: para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe un $R_x > 0$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_x}(x)$ entonces vale la fórmula del teorema de la divergencia.

Versión global

Tenemos: para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe un $R_x > 0$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_x}(x)$ entonces vale la fórmula del teorema de la divergencia.

Usando la compacidad de $\overline{\Omega}$ (cerrado y acotado) podemos encontrar una familia **finita** de puntos x_i , $1 \leq i \leq m$ con sus respectivos $R_i = R_{x_i} > 0$ tales que

Versión global

Tenemos: para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe un $R_x > 0$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_x}(x)$ entonces vale la fórmula del teorema de la divergencia.

Usando la compacidad de $\overline{\Omega}$ (cerrado y acotado) podemos encontrar una familia **finita** de puntos x_i , $1 \leq i \leq m$ con sus respectivos $R_i = R_{x_i} > 0$ tales que

- $\overline{\Omega}$ se puede cubrir por la unión $\cup_{i=1}^m B_{R_i}(x_i)$,

Versión global

Tenemos: para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe un $R_x > 0$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_x}(x)$ entonces vale la fórmula del teorema de la divergencia.

Usando la compacidad de $\overline{\Omega}$ (cerrado y acotado) podemos encontrar una familia **finita** de puntos x_i , $1 \leq i \leq m$ con sus respectivos $R_i = R_{x_i} > 0$ tales que

- $\overline{\Omega}$ se puede cubrir por la unión $\cup_{i=1}^m B_{R_i}(x_i)$,
- y para cualquier bola $B_{R_i}(x_i)$, si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ entonces vale el teorema.

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.

Para $x \in \bar{\Omega}$ definamos

$$\eta_i(x) = \frac{\tilde{\eta}_i(x)}{\sum_{j=1}^m \tilde{\eta}_j(x)}$$

Entonces

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.

Para $x \in \overline{\Omega}$ definamos

$$\eta_i(x) = \frac{\tilde{\eta}_i(x)}{\sum_{j=1}^m \tilde{\eta}_j(x)}$$

Entonces

- η_i es C^1 en una vecindad de $\overline{\Omega}$

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.

Para $x \in \overline{\Omega}$ definamos

$$\eta_i(x) = \frac{\tilde{\eta}_i(x)}{\sum_{j=1}^m \tilde{\eta}_j(x)}$$

Entonces

- η_i es C^1 en una vecindad de $\overline{\Omega}$
- η_i se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.

Para $x \in \overline{\Omega}$ definamos

$$\eta_i(x) = \frac{\tilde{\eta}_i(x)}{\sum_{j=1}^m \tilde{\eta}_j(x)}$$

Entonces

- η_i es C^1 en una vecindad de $\overline{\Omega}$
- η_i se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$
- para cualquier $x \in \overline{\Omega}$: $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$.

Consideremos un campo \vec{F} de clase C^1 .

Consideremos un campo \vec{F} de clase C^1 .

Como $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$ $\vec{F} = \sum_{i=1}^m (\eta_i \vec{F})$

Consideremos un campo \vec{F} de clase C^1 .

Como $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$ $\vec{F} = \sum_{i=1}^m (\eta_i \vec{F})$

Cada función $\eta_i \vec{F}$ es un campo C^1 que se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ por lo que podemos aplicar la versión local del teorema de la divergencia

$$\int \int_{\partial\Omega} \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(\eta_i F) dV$$

Consideremos un campo \vec{F} de clase C^1 .

Como $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$ $\vec{F} = \sum_{i=1}^m (\eta_i \vec{F})$

Cada función $\eta_i \vec{F}$ es un campo C^1 que se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ por lo que podemos aplicar la versión local del teorema de la divergencia

$$\int \int_{\partial\Omega} \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(\eta_i \vec{F}) dV$$

Sumando

$$\int \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^m \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \text{div}(\eta_i \vec{F}) dV$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^m \eta_i \vec{F} \right) \, dV \\ &= \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV \end{aligned}$$