

Ejercicios Propuestos 2: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Felipe Alvarez
Auxiliares: Emilio Vilches & Mauro Santoro

12 de Agosto de 2008

P1. Dado el campo vectorial

$$\vec{F}_1(x, y, z) = (0, 0, z)$$

- a) Sea Σ la superficie del toro de eje de simetría z , centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0 > r_0$). Calcule $I_1 = \int_{\Sigma} \vec{F}_1 d\vec{S}$ orientado según la normal exterior.
- b) Dado un campo vectorial $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ sea V el volumen encerrado por Σ , calcule $I_2 = \int \int \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$. ¿Qué puede decir de I_1 e I_2 ?

P2. Sea S la superficie de la esfera unitaria. Sean $\vec{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \sin(\phi) d\phi d\theta$$

P3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, y su base $S_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0\}$. Sea el campo eléctrico definido por

$$\vec{E}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

- a) Evaluar $I_1 = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S}$ orientado según la normal exterior.
- b) Sea V el volumen encerrado por S , calcule $I_2 = \int \int \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$. ¿Qué puede decir de I_1 e I_2 ?
- P4.** Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (yz, e^{\sin(xz)} + \tan z, y^2)$ a través de la parte superior del semi-elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.
- P5.** Considere la superficie Σ correspondiente a la mitad inferior del toro de radios R y a según se muestra en la figura

- (i) Determinar el centro de masa de Σ , suponiendo densidad constante. Puede ocupar argumentos de simetría debidamente explicados.
- (ii) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ a través de Σ , orientado según la normal exterior.

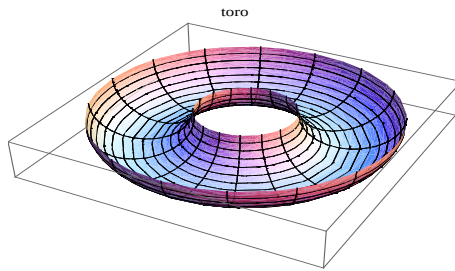


Figura 1: Superficie Σ : Mitad Toro

P6. Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^z \sin(y) + xy^2z)\vec{i} + (e^x \cos(z) + x^2yz)\vec{j} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$$

a través del manto cilíndrico $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 2$, sin incluir las tapas.