Ejercicio 1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Felipe Alvarez
Auxiliares: Emilio Vilches & Mauro Escobar
19 de Agosto de 2008

P1. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

1. Calcule la integral de trabajo del campo $(x^2 + z)\,\hat{\imath} + (y^2 + x)\,\hat{\jmath} + (z^2 + y)\,\hat{k}$ a lo largo de Γ.
2. Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ y $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el Teorema de Stokes.

Solución:

1. Debemos calcular una integral de trabajo, esto es, debemos calcular $\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y para ello debemos recordar que siempre hay al menos 3 caminos posibles:
A. Calcular directamente la integral de linea, parametrizando la curva y calculando el elemento de linea. Por lo general este camino no es muy utilizado porque no se aprovecha la teoría desarrollada.

   B. Ver si $\vec{F}$ es un campo conservativo y buscar un potencial asociado, esto es, buscar una función escalar g tal que $\vec{F} = -\nabla g$. Para ello, por lo general se verifica que el campo sea de clase C^1 y se calcula el rotor de $\vec{F}$, y si el rotor es nulo se procede a buscar un campo conservativo (cuando esto no sea muy difícil). Ahora con el campo conservativo g, supongamos que se tiene una parametrización $\vec{r}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ de Γ, entonces

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b -\nabla g \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = -\int\limits_a^b \frac{dg(\vec{r}(t))}{dt} dt = g(\vec{r}(a)) - g(\vec{r}(b))$$

   vemos aquí que no es necesario encontrar la parametrización, sólo los puntos extremos. La dificultad de este método radica en encontrar el potencial, lo cual, en algunos casos, puede ser mucho mas difícil que calcular la integral de linea directamente.

   C. Si la curva Γ es cerrada, se puede buscar alguna superficie regular S tal que su borde geométrico coincida con Γ (la idea es que sea alguna superficie fácil de parametrizar), con esto SI EL CAMPO ES DE CLASE C^1 sobre S y está bien definido el campo de normales, podemos utilizar el teorema de Stokes para calcular el trabajo, es decir:

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S \text{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

   la única precaución que debemos tener es que la orientación de la curva sea consistente con el campo de normales considerada en el calculo del flujo.
La gracia de este camino es, que si el campo es muy corchudo, al aplicar el rotor, se podría encontrar una expresión mas simple para calcular la integral de flujo. Cabe mencionar que no es necesario que Γ sea cerrada, dado que siempre se puede cerrar Γ y

aplicar el teorema de Stokes, esto es, si Γ no es cerrada, consideramos una curva Γ'(no muy complicada, para efectos de cálculo) de tal manera que $\Gamma \cup \Gamma'$ sea cerrada(con orientaciones consistentes)y aplicamos el método anterior a $\Gamma \cup \Gamma'$ para obtener:

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{S} \text{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} dS - \int\limits_{\Gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Veamos ahora nuestro caso: Claramente no utilizaremos el método A, pues es el más largo y hay que calcular varias integrales. Llamemos $\vec{F}$ al campo y calculemos el rotor del campo:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ x^2 + z & y^2 + x & z^2 + y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)^t$$

vemos que el rotor es no nulo(y mas simple de integrar), luego utilizamos C. Como la curva es un circulo (verificar), podemos considerar como superficie S el circulo generado por la curva. Notamos que la normal unitaria es constante e igual a $\hat{k}$. Parametrizando la superficie;

$$x = \rho \cos\theta \quad x = \rho \sin\theta \quad z = z_0 \quad \rho \in [0, \rho_0] \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

con $z_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $z_0 = \rho^2$ y con esto

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{S} \text{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \hat{k} \rho d\theta d\rho = \pi \rho_0^2$$

2. Lo primero que debemos notar es que el campo es de clase C^1 en $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{eje } z\}$, pues el campo $\vec{F}$ tiene una singularidad no reparable en $\rho = 0$. Luego debemos verificar que el rotor es nulo sobre D(donde efectivamente podemos calcular dicho operador).

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \frac{1}{\rho} & z \end{vmatrix} = 0$$

Por otro lado consideremos Γ el circulo radio a y altura z_0. Se tiene que

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{a} \hat{\theta} + z_0 \hat{k} \right) \cdot a \hat{\theta} d\theta = 2\pi \neq 0$$

La aparente contradicción surge porque si uno llega y aplica el Teorema de Stokes sin considerar la hipótesis de diferenciabilidad de $\vec{F}$ llegaría a algo absurdo como

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi = 0 = \iint\limits_{S} \text{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

donde S es el disco de altura z_0 y radio a.