

Problema

Resuelva el problema de Dirichlet en el círculo

$$\Delta u = 0 \quad R > r$$

$$u(R, \theta) = f(\theta) \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

Solución: Separamos variables,

$$u(r, \theta) = A(r)B(\theta)$$

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{donde } u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$u_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\Leftrightarrow r^2 \frac{A''(r)}{A(r)} + r \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{A''(r)}{A(r)} + r \frac{A'(r)}{A(r)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = \lambda = \text{cte}$$

$$\Rightarrow (1) \quad B''(\theta) + \lambda B(\theta) = 0$$

$$(2) \quad r^2 A''(r) + r A'(r) - \lambda A(r) = 0$$

$$(1) \Rightarrow B(\theta) = a \cos(\sqrt{\lambda} \theta) + b \sin(\sqrt{\lambda} \theta), \quad \text{como buscamos soluciones continuas, imponemos que}$$

$$B(-\pi) = B(\pi)$$

$$B'(-\pi) = B'(\pi)$$

Luego

$$\left. \begin{aligned} B(\pi) &= a \cos(\sqrt{\lambda} \pi) + b \sin(\sqrt{\lambda} \pi) \\ B(-\pi) &= a \cos(\sqrt{\lambda} \pi) - b \sin(\sqrt{\lambda} \pi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b \sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} B'(\pi) &= -a \sin(\sqrt{\lambda} \pi) + b \cos(\sqrt{\lambda} \pi) \\ B'(-\pi) &= a \sin(\sqrt{\lambda} \pi) + b \cos(\sqrt{\lambda} \pi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0$$

pero queremos soluciones no triviales

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} \pi = n \pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = n^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

por otro lado, $\lambda = n^2$

$$\Rightarrow r^2 A''(r) + r A'(r) - n^2 A(r) = 0$$

si $n=0$ $r^2 A''(r) + r A'(r) = 0 \Rightarrow A(r) = a + b \log r$.

pero queremos soluciones continuas y $\log$ no lo es en $r=0$, luego pedimos que $b=0$.

si $n \geq 0$ $r^2 A''(r) + r A'(r) - n^2 A(r) = 0$, dada la forma de la ecuación buscamos soluciones de la forma $A(r) = r^m$

$$\Rightarrow A'(r) = m r^{m-1}, \quad A''(r) = m(m-1) r^{m-2}$$

Luego $m(m-1) + m - n^2 = 0 \Rightarrow m = \pm n$

$$\Rightarrow A(r) = \bar{a} r^n + \bar{b} r^{-n}$$

imponemos que $\bar{b}=0$ pues queremos soluciones continuas

(obs: notemos que si tratamos de resolver la ecuación en un anillo estas soluciones son admisibles)

$$\Rightarrow A(r) = \bar{a} r^n \quad \text{si } n \geq 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= \bar{a} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \\ &= A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta) \end{aligned}$$

superponiendo las soluciones

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta))$$

Ahora debemos imponer la condición de Berde:

$$u(R, \theta) = f(\theta).$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (A_n R^n \cos(n\theta) + B_n R^n \sin(n\theta)) = f(\theta) \quad (*)$$

para encontrar los coeficientes y así resolver el problema debemos desarrollar en serie de Fourier f en $[-\pi, \pi]$.
para ello recordamos que

$$\int_{-l}^l \frac{\sin(\frac{n\pi\theta}{l})}{l} \frac{\sin(\frac{m\pi\theta}{l})}{l} d\theta = \begin{cases} l & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} = l \delta_{nm}$$

$$(**) \int_{-l}^l \frac{\sin(\frac{n\pi\theta}{l})}{l} \frac{\cos(\frac{m\pi\theta}{l})}{l} d\theta = 0$$

$$\int_{-l}^l \frac{\cos(\frac{n\pi\theta}{l})}{l} \frac{\cos(\frac{m\pi\theta}{l})}{l} d\theta = \begin{cases} l & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} = l \delta_{nm}$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker dada por

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Luego multiplicando (*) por $\cos(m\theta)$ e integrando entre $[-\pi, \pi]$ y usando (**) obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n \pi \delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n \geq 1$$

analogamente, multiplicando (*) por $\sin(m\theta)$ e integrando entre $[-\pi, \pi]$ y usando (**) se obtiene

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n \geq 1$$

$$y \quad B_0 = 0 \quad y \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Luego la solución es

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left[\frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right] r^n \cos(n\theta) + \left[\frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right] r^n \sin(n\theta) \right]$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n}{\pi R^n} f(\varphi) \cos(n\varphi) \cos(n\theta) + \frac{r^n}{\pi R^n} f(\varphi) \sin(n\varphi) \sin(n\theta) d\varphi \right]$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (r^n f(\varphi) \cos(n\varphi) \cos(n\theta) + r^n f(\varphi) \sin(n\varphi) \sin(n\theta)) d\varphi.$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (r^n f(\varphi) (\cos(n(\theta - \varphi)) + \frac{1}{2}) \right]$$

pero si $R=1$.

$$[r^2 + 1 - 2r \cos \gamma] \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\gamma) = r \cos \gamma - r^2.$$

$$\Rightarrow [r^2 + 1 - 2r \cos \gamma] \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\gamma) \right] = \frac{1}{2} (1 - r^2)$$

Luego

$$u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{1+r^2-2r \cos(\phi-\theta)} \quad \text{si } R=1.$$

$$\Rightarrow u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(1, \phi) d\phi}{1+r^2-2r \cos(\phi-\theta)} \quad \text{por } f(\phi) = u(1, \phi)$$

esta última fórmula es conocida como la fórmula de Poisson.

para $R=1$, lo que se deduce en el capítulo 18

(en la página 277 del apunte).

obs: el problema que inicialmente queriamos resolver se acabó en ~~XXX~~ el resto es jugo útil.

Jugo:

La fórmula que encontramos en ~~(A)~~ admite la siguiente generalización para el disco de radio R .

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(R, \phi) d\phi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)}.$$

Definición: $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice armónica si es dos veces diferenciable y satisface $\Delta u = 0$.

Añ probamos que toda función armónica se puede expresar solamente con los valores en su frontera.

esto es

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(R, \phi) d\phi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)}.$$

(ver pregunta 3 control 1).

también notemos que

$$u(0, \theta) = \frac{R^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(R, \phi) d\phi}{R^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \phi) d\phi \quad (V)$$

es decir el valor de una función armónica en el centro de cada disco es el promedio su frontera.

Ejercicio: Mostrar que si $f = u + iv$ es analítica, entonces u y v son armónicas y después relacionar la fórmula ~~(V)~~ con el problema.