Aux Cálculo avanzado 14/10

P1) Probar que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a>1$

Sol: Sea $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, La idea es expresar I

como una integral de contorno, para ello notamos que si z es de la forma $z = e^{i\theta}$ $\theta \in [0,2\pi]$ entonces

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \quad ; \quad dz = e^{i\theta} i\, d\theta \Rightarrow \frac{dz}{iz} = d\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

luego

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{(z+z^{-1})}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

y esta última integral se puede evaluar usando el teorema de los residuos.

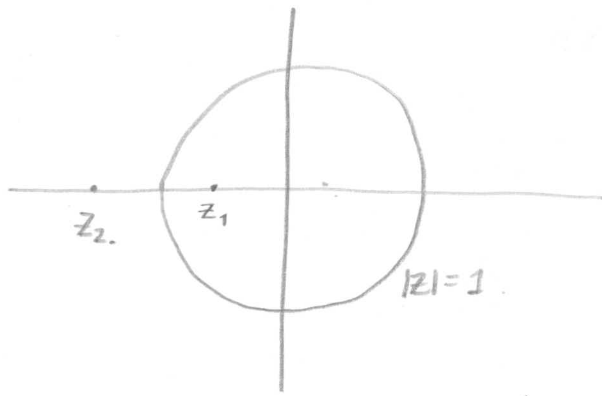
Calculemos los ceros de $z^2+2az+1$;

$$z^2+2az+1=0 \iff z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \qquad z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$$

además se verifica que $|z_1|<1$ y $|z_2|>1$. (pues $a>1$)

luego el único polo dentro de nuestra curva es z_1



usando el teorema de los residuos

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right)$$

"el único polo que cae dentro de $|z|=1$"

pero

$$Res\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

pues z_1 es un polo simple (verificar)

$$= \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{-a+\sqrt{a^2-1}-(-a-\sqrt{a^2-1})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

Luego $$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

entonces

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad \blacksquare$$

obs 1: En general cuando se quiere calcular

$\int_\Gamma f(z)dz$ usando el teorema de los residuos

y $f(z)$ es una función meromorfa, de la forma

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, lo que se hace es buscar los

ceros de $g(z)$, los cuales serán <u>candidatos</u>

a polos, es por eso importante verificar

que efectivamente los candidatos sean polos

(esto se hace sólo para los candidatos que

se encuentran dentro de Γ),

así para verificar que <u>p es polo de orden m</u>, de la

función $f(z)$, basta con encontrar el menor

$m>0$ tal que

$$\lim_{z\to p} (z-p)^m f(z) \text{ exista y sea distinto de cero.}$$

por ejemplo:

- $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$, $z=0$ es candidato a polo, pero

$$\lim_{z\to 0} (z-0)^0 \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$$, luego $z=0$ no es polo. (es singularidad reparable)

- $f(z) = \frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z}$, $z=\frac{\pi}{2}$ es candidato a polo (un candidato a polo), luego

$$\lim_{z\to 0} \frac{(z-\frac{\pi}{2})^m}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z} = \lim_{z\to \frac{\pi}{2}} \frac{(z-\frac{\pi}{2})^{m-1}}{\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{(m-1)(z-\frac{\pi}{2})^{m-2}}{-\operatorname{sen} z}$$

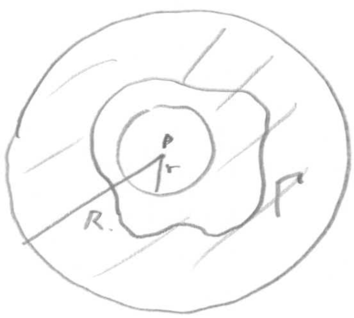
L'Hôpital

y se observa que para $m=2$ el límite anterior existe y es no nulo, luego $z=\frac{\pi}{2}$ es un polo de orden 2.

es importante tener claro el orden de un polo pues si p es un polo de orden m de f

$$Res(f,p) = \lim_{z\to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}\left[(z-p)^m f(z)\right]$$

obs2: Si f es una función meromorfa y consideramos su expansión en serie de Laurent en el anillo $r<|z-p|<R$



$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-p)^n = \frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-p)^2} + \frac{a_{-1}}{z-p} + a_0 + a_1(z-p) + a_2(z-p)^2 + \cdots$$

se observa que $\frac{a_{-m}}{z^m}, \ldots, \frac{a_{-2}}{z^2}$ admiten primitivas y $a_0, a_1 z, a_2 z^2, \ldots$ son funciones analíticas, así si Γ es una curva cerrada Γ como la de la figura

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-p)^n = \int_\Gamma \left(\frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-p)^2}\right) + a_{-1}\int_\Gamma \frac{dz}{z-p}$$
$$+ \int_\Gamma (a_0 + a_1(z-p) + \cdots)$$

y $\displaystyle \cdot \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{a_{-m}}{(z-p)^m} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z-p)^2} \right)}_{\substack{\text{poseen} \\ \text{primitiva}}} = 0$ } proposicion 9.2.1 parte 3

$$\cdot \int_\Gamma (\underbrace{a_0 + a_1(z-p) + \dots}_{\text{analitico}}) dz = 0$$

analitico } Cauchy - Goursat.

$$\cdot \int_\Gamma \frac{dz}{z-p} = 2\pi i \quad \text{(Fórmula de Cauchy)}$$

Luego $\displaystyle \int_\Gamma f(z)dz = a_{-1} 2\pi i$

así a_{-1} es el residuo de f en P.

esto sirve en el momento de calcular el residuo, en el problema anterior:

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} \Rightarrow A(z-z_2) + B(z-z_1) = 1$$

$\cdot$ si $z = z_1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{z_1 - z_2}$

$\cdot$ si $z = z_2 \Rightarrow B = \dfrac{1}{z_2 - z_1}$.

$$= \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_1+z_1-z_2} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{(z_1-z_2)\left(1 + \frac{z-z_1}{z_1-z_2}\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z_1-z_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z_1-z_2)^k} (z-z_1)^k}_{\text{desarrollo en serie de Laurent}} \quad \text{si } \left| \frac{z-z_1}{z_1-z_2} \right| < 1$$

desarrollo en serie de Laurent de $\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ en torno a z_1

Luego el coeficiente asociado a la potencia -1 es A

y coincide con el residuo que habiamos calculado.

P2) Pruebe que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)\,d\theta}{\cosh a + \cos\theta} = 2\pi(-1)^n \frac{e^{-na}}{\operatorname{senh} a}, \quad n \geq 0 \text{ entero}, \quad a > 0$$

Sol: como en el problema anterior

$$\begin{cases} z = e^{i\theta} & \frac{dz}{iz} = d\theta \\ \cos(n\theta) = \frac{e^{n\theta i} + e^{-n\theta i}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \\ \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)\,d\theta}{\cosh a + \cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^n + z^{-n}}{2}\right)}{\cosh a + \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{(z^{2n}+1)\,dz}{(2\cosh a z + z^2 + 1)\, z^n}$$

- Candidatos a pdo:

$z = 0$ y las raíces de $z^2 + 2\cosh a\, z + 1$

- $z^2 + 2\cosh a\, z + 1 = 0 \iff z = \frac{-2\cosh a \pm \sqrt{4\cosh^2 a - 4}}{2}$

$\iff z = -\cosh a \pm \operatorname{senh} a = -\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right) \pm \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)$

$\iff z_1 = -e^{-a} \qquad z_2 = -e^{a}$

se verifica que, como $a > 0$, $|z_1| < 1$ y $|z_2| > 1$

luego los candidatos a polos (interesantes) son

$z=0$ y $z=z_1$ (caen dentro de $|z|=1$)

veamos que son polos y calculemos sus ordenes

- $z=0$ $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{(z^{2n}+1)(z-0)^m}{z^n(z-z_1)(z-z_2)}$, se $m=n$

$$= \frac{1}{z_1 \cdot z_2} \neq 0 \Rightarrow z=0 \text{ es polo de orden } n$$

- $z=z_1$ $\displaystyle\lim_{z\to z_1} \frac{(z^{2n}+1)(z-z_1)^m}{z^n(z-z_1)(z-z_2)}$, se $m=1$

$$= \frac{(z_1^{2n}+1)}{z_1^n(z_1-z_2)} \neq 0 \Rightarrow z=z_1 \text{ es polo de orden } 1.$$

Por lo que aplicando el Teorema de los residuos

$$\int_{|z|=1} \frac{(z^{2n}+1)\,dz}{z^n(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,z_1)\right]$$

- Cálculo de Residuo:

- $z=z_1$

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{(z^{2n}+1)(z-z_1)}{z^n(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{(z_1^{2n}+1)}{z_1^n(z_1-z_2)} = \frac{(z_1^{n}+z_1^{-n})}{(z_1-z_2)}$$

$$= \frac{\left((-e^{-a})^n + (-e^{-a})^{-n}\right)}{-e^{-a}+e^{a}} = (-1)^n \frac{\left(\frac{e^{-na}+e^{na}}{2}\right)}{\frac{e^{a}-e^{-a}}{2}}$$

$$= (-1)^n \frac{\cosh(na)}{\operatorname{senh}(a)}$$

$$\mathrm{Res}(Y_{\cdot},0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[\frac{(z^{(2n)}+1)\,z^{n}}{z^{n}(z-z_1)(z-z_2)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[\frac{z^{2n}+1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]$$

pero $\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\dfrac{A}{z-z_1}+\dfrac{B}{z-z_2}\Rightarrow A(z-z_2)+B(z-z_1)=1$

- si $z=z_1$ $\quad A=\dfrac{1}{z_1-z_2}$
- si $z=z_2$ $\quad B=\dfrac{1}{z_2-z_1}$

$$=\frac{1}{(z_1-z_2)(z-z_1)}+\frac{1}{(z_2-z_1)(z-z_2)}\quad,\quad z_1-z_2=2\,\mathrm{senh}\,a$$

$$=\frac{1}{2\,\mathrm{senh}\,a}\left[\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right]$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}(Y_{\cdot},0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{2\,\mathrm{senh}\,a}\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[\frac{(z^{2n}+1)}{(z-z_1)}-\frac{(z^{2n}+1)}{(z-z_2)}\right]$$

por la regla de Leibniz

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left(\frac{z^{2n}+1}{z-z_1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z^{2n}+1)^{(k)}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)^{(n-1-k)}\quad(*)$$

pero vemos que cuando $z\to 0$ el único término que no se anula es el término con $k=0$.

y también $\left(\dfrac{1}{z-z_1}\right)^{(n-1)}=(-1)^{(n-1)}\dfrac{(n-1)!}{(z-z_1)^{n}}$

$$\Rightarrow\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)^{(n-1)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(-1)^{n}z_1^{\,n}}=\frac{(-1)(n-1)!}{z_1^{\,n}}$$

por lo tanto

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2\operatorname{senh}a}\cdot\left[\binom{n-1}{0}\frac{(-1)(n-1)!}{z_1^{\,n}} - \binom{n-1}{0}\frac{(-1)(n-1)!}{z_2^{\,n}}\right]$$

$$= \frac{(-1)}{2\operatorname{senh}a}\cdot\left[\frac{1}{(-e^{-a})^n} - \frac{1}{(-e^{a})^n}\right]$$

$$= \frac{(-1)}{2\operatorname{senh}a}\cdot\frac{1}{(-1)^n}\left[\frac{e^{an}-e^{-an}}{e^{-na+na}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{senh}a}\cdot\operatorname{senh}(na)$$

$\Rightarrow$

$$I = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\left[\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{senh}(na)}{\operatorname{senh}a} + \frac{(-1)^n\cosh(na)}{\operatorname{senh}a}\right]$$

$$I = \frac{2\pi(-1)^n}{\operatorname{senh}a}\left[\frac{e^{na}+e^{-na}}{2} - \frac{e^{na}+e^{-na}}{2}\right]$$

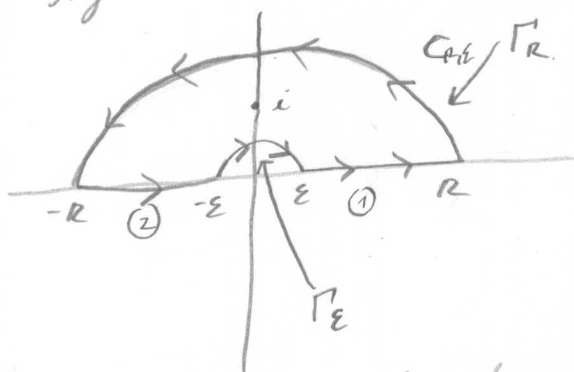
$$= \frac{2\pi(-1)^n}{\operatorname{senh}a}\, e^{-na}$$

$$\therefore\ \boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos(n\theta)\,d\theta}{\cosh a+\cos\theta} = \frac{2\pi(-1)^n e^{-na}}{\operatorname{senh}a}}$$

P3) Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)}\,dx$

Sol: Consideramos $f(z) = \dfrac{\log z}{1+z^2}$ e integramos

en el siguente contorno $C_{R,\varepsilon}$



. i es polo de $f(z)$

Usando el teorema de los residuos

$$\int_{C_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{\log(z)(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\log i}{2i}\cdot 2\pi i$$

$$= (2\pi i)\cdot\frac{(\log|i| + i\arg(i))}{2i} = \pi\cdot i\arg(i) = \pi i\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} i$$

además $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{①} + \int_{②} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_R}$

calculemos la integrales

①:

$$\int_{①} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log|x| + i\arg(x)}{1+x^2}\,dx = \int_\varepsilon^R \frac{\log|x|}{1+x^2}\,dx \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

$z = x \quad x\in[\varepsilon, R]$

cuando $\varepsilon\to 0$ y $R\to\infty$

$$(- \text{ de la orientación})$$

②:

$$\int_{②} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{[\log|-x| + i\arg(-x)]}{1+x^2}(-1)\,dx \quad \text{y} \quad \arg(-x) = \pi$$

$z = -x \quad x \in [\varepsilon, R]$

$dz = -dx$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log|x|\,dx}{1+x^2} + i\pi \underbrace{\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{1+x^2}}_{\arctan(R)-\arctan(\varepsilon)}$$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\log x\,dx}{1+x^2} + i\pi\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y } R \to \infty.$$

Γ_ε:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = -\int_0^{\pi} \frac{\log(\varepsilon e^{i\theta})}{1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}}\cdot \varepsilon e^{i\theta} i\,d\theta = -\int_0^{\pi}$$

$z = \varepsilon e^{i\theta} \quad \theta \in [0,\pi]$

$\Rightarrow dz = \varepsilon e^{i\theta} i\,d\theta$

$\log z = \log \varepsilon + i\theta$

como nos interesa que $\displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$

acotamos:

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{(\log\varepsilon + i\theta)\,\varepsilon e^{i\theta} i\,d\theta}{1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}} \right|$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{|\log\varepsilon + i\theta|\cdot\varepsilon\,d\theta}{|1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}|} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \theta^2}\cdot\varepsilon\,d\theta}{|1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}|}$$

pero

$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad |z-w| \geq \big||z|-|w|\big|$, en efecto

- $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w| \Rightarrow |z|-|w| \leq |z-w|$
- $|w| = |w-z+z| \leq |w-z| + |z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |z-w|$ $\blacksquare$

Luego $|1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}| \geq |1-\varepsilon^2|$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}|} \leq \frac{1}{|1-\varepsilon^2|}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\log z}{1+z^2}\, dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \theta^2}}{|1+\varepsilon^2 e^{i2\theta}|} \cdot \varepsilon \, d\theta \leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \pi^2}}{|1-\varepsilon^2|}\, \varepsilon \, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \pi^2}}{|1-\varepsilon^2|} \cdot \varepsilon \pi$$

y $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \pi^2}}{|1-\varepsilon^2|} \cdot \varepsilon \pi = 0$

pues $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} (\log \varepsilon) \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{-1}{\varepsilon^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} -\varepsilon = 0$$

Luego $\displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\log z}{1+z^2}\, dz \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Γ_R:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{\log(Re^{i\theta})}{1+R^2e^{i2\theta}} . Re^{i\theta} i\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{(\log R + i\theta)}{1+R^2e^{i2\theta}} Re^{i\theta} i\,d\theta$$

$z = Re^{i\theta} \quad \theta \in [0,\pi]$

nos interesa que $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \to 0$ cuando $R \to \infty$

acotamos:

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{\log z}{1+z^2}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{(\log R + i\theta)}{1+R^2e^{i2\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{|\log R + i\theta|\, R\, d\theta}{|1+R^2e^{i2\theta}|} \leq \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\log^2 R + \pi^2}}{|R^2-1|} R\, d\theta$$

pues $|1+R^2e^{i2\theta}| \geq |1-R^2| = |R^2-1|$

(ver hoja 12)

$$\leq \frac{\sqrt{\log^2 R + \pi^2}\, R\pi}{|R^2-1|}$$

$$\text{y } \lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{\log^2 R + \pi^2} . R\pi}{|R^2-1|} = \lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{\log^2 R}{R^2} + \frac{\pi^2}{R^2}} . \pi}{|1-\frac{1}{R^2}|} = 0$$

$$\text{pues } \lim_{R\to\infty} \frac{\log R}{R} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}}{1} = 0$$

Finalmente $\displaystyle\int_{C_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \frac{\pi^2}{2}i$, tomando $\varepsilon \to 0$
y $R \to \infty$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2} = i\frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0}$$

Consultas a

evilches@dim.uchile.cl