

EJERCICIOS PROPUESTOS: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES

PROFESOR: FELIPE ALVAREZ
AUXILIARES: EMILIO VILCHES & MAURO ESCOBAR

30 DE SEPTIEMBRE DE 2008

P1. Describa los siguientes conjuntos:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \leq 1\}$.
b) $\{z \in \mathbb{C} : |2z + 3| > 4\}$.
c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}, z \neq 0\}$.
d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \geq |z|\}$.
e) $\{z \in \mathbb{C} : [\text{Re}(z)]^2 > 1\}$.
f) $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = \text{Im}(z)\}$.

Definición. Sea $c \in \mathbb{C}$ diremos que c es acotado si existe $M > 0$ tal que $|c| < M$.

P2. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| = |b| > 1$ y la sucesión $a^n - b^n$ es acotada. Pruebe que $a = b$.

P3. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en 0 tal que $f(z+w) = f(z)f(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es continua en \mathbb{C} .

P4. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ fijo, tal que $|\alpha| < 1$. Pruebe que $|z| \leq 1$ ssi $|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}| \leq 1$.

Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, diremos que Ω es conexo por caminos si para todo par de puntos $x, y \in \Omega$, existe una curva continua contenida en Ω que une a x e y .

P5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos. Pruebe que:

- a) Si $f' = 0$ en Ω entonces f es constante en Ω .
b) Si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante.
INDICACIÓN: Considere $|f|^2$ y pruebe que $f' = 0$.

P6. Estudiar en que puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

- a) $f(z) = \bar{z}$
b) $f(z) = e^x (\cos(y) - i \sin(y))$ si $z = x + iy$.
c) $f(z) = e^{-x} (\cos(y) - i \sin(y))$ si $z = x + iy$.

Definición. Se definen las funciones trigonométricas hiperbólicas:

$$\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2i}$$

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$

P7. a) Demuestre que $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) Sea $L \subset \mathbb{C}$ una recta horizontal, y $V \subset \mathbb{C}$ una recta vertical. Demuestre que:

- 1) El conjunto $\{\sin(z) \mid z \in L\} \subset \mathbb{C}$ es una elipse
- 2) el conjunto $\{\sin(z) \mid z \in V\} \subset \mathbb{C}$ es una hipérbola

Es decir, el seno mapea rectas horizontales en elipses y las rectas verticales en hipérbolas.

INDICACIÓN: Para (b) observe que $\gamma(t) = \cosh(t) + i \sinh(t)$, $t \in \mathbb{R}$, es la parametrización de una hipérbola.

P8. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

- a) $\sum_0^\infty z^{n!}$
- b) $\sum_0^\infty (n + 2^n)z^n$

P9. Suponga que $\sum_0^\infty c_n z^n$ tiene radio de convergencia R . Encontrar el radio de convergencia de

- a) $\sum_0^\infty n^p c_n z^n$
- b) $\sum_0^\infty |c_n| z^n$
- c) $\sum_0^\infty c_n^2 z^n$

Teorema. Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

P10. Usando el teorema anterior encontrar el radio de convergencia de

- a) $\sum \frac{(-1)^n}{n!} z^n$
- b) $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- c) $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$
- d) $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$

P11. Encontrar el dominio de convergencia de

- a) $\sum n(z - i)^n$
- b) $\sum \frac{(-1)^n}{n!} (z + 1)^n$
- c) $\sum n^2 (2z - 1)^n$

P12. Suponga que

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

tiene radio de convergencia $R > 0$. mostrar que

$$h(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

es analítica en todo \mathbb{C} .

P13. Mostrar que

$$\sum \frac{z}{(1 + z^2)^n}$$

converge para todo z exterior a la lemniscata

$$|1 + z^2| = 1$$

P14. Sea la secuencia a_0, a_1, \dots definida por la ecuación

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum a_n (x - 3)^n \quad 0 < x < 1$$

encontrar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)$$

P15. a) Pruebe que para $b \in (-1, 1)$ se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - b^2 - x^2}{(1 - b^2 - x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

INDICACIÓN. Integre $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular dependiente de R y luego haga $R \rightarrow \infty$.

b) Suponga que $a \in \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$. Integrando la función $\frac{e^{az}}{e^z+1}$ en torno a un rectángulo de vértices en $\pm R$ y $\pm R + 2\pi i$, muestre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

P16. *Formula de Wallis*

a) Demuestre que

$$z^{-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)! z^{2n-2k-1}}{(2n-k)!k!} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

b) Pruebe que

$$\oint_{\Gamma} z^{-1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

donde $\Gamma = \partial(0, 1)$ es la circunferencia de centro 0 y radio 1, recorrida en sentido antihorario.

c) Usando la parte (2) pruebe que

$$\int_0^{2\pi} (2 \cos(\theta))^{2n} d\theta = 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

d) Muestre que

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2n} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

e) Calcule

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(\theta))^{2n} d\theta$$

para $n \in \mathbb{N}$.

P17. “Teorema del valor medio de Gauss”

a) Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces $\forall r \in (0, R)$ se tiene que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

b) Usando lo anterior muestre que

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos \theta) \cosh(\sin \theta) d\theta = 2\pi$$

$$2) \int_0^{2\pi} \log[a^2 + 1 + 2a \cos(n\theta)] d\theta = 4\pi \log(a), \text{ donde } a > 1, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Indicación: } a^2 + 1 + 2a \cos(n\theta) = |a + e^{in\theta}|^2$$

c) Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2 + 1 + 2a \cos(n\theta)} d\theta \quad a > 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

Indicación: Considere $f(z) = \frac{1}{z^n + a}$

P18. Usar la formula de Cauchy para calcular

a) $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$

b) $\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta} - i\theta)} d\theta$

INDICACIÓN: Considere

$$f(z) = \frac{e^z}{z^n}$$

para $n = 1, 2$

P19. Evaluar

a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz = 2\pi i$

b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2} dz = 2\pi i$