Control 1: MA2A2 - 2008 2.1

Pauta Problema 2

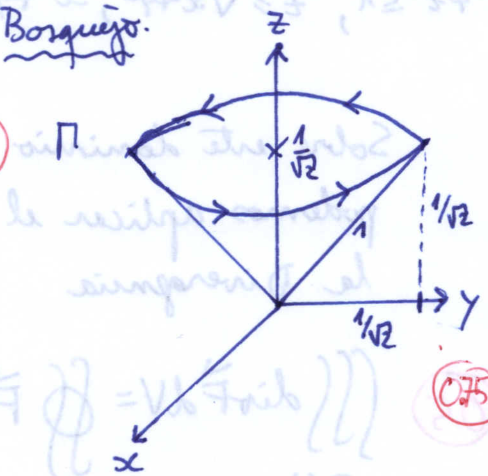
(a) Sea $\Gamma$ la intersección de $x^2+y^2+z^2=1$ con $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\geq 0)$

Tenemos entonces que $z\geq 0 \wedge 2z^2=1 \iff z=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Así $\Gamma: z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

Bosquejo.

0.5




Se pide evaluar $\Phi = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

con $\vec{F} = (z-\rho)\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\,\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\rho\,\hat{k}$

Parametrizamos $\Gamma$ en cilíndricas

0.75 $\vec{r}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\rho} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$, $\theta\in[0,2\pi)$

de modo que

0.75 $d\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\theta}\,d\theta$

Así

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \vec{F}\Big|_{\substack{\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}}}\cdot\hat{\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi^2$$

0.5 0.5

Observación: Tal como está descrito, el campo tiene una singularidad en $\rho=0$, por lo tanto no es posible aplicar el Teo. de Stokes a una superficie que intersecte al eje Z. Más aún, el campo tiene un comportamiento distinto en $\theta=0$ y $\theta=2\pi$, lo que no afecta la integral de camino pero hace que el rotor no tenga sentido en esos extremos.
El alumno que no detectó esta dificultad y por consiguiente aplicó incorrectamente el Teo. de Stokes tiene una penalización de 0.5 pts.
Un ejemplo de esto sería: (1) $\Gamma=\partial T$ con $T$ la tapa $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\rho\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$, orientada según $\hat{k}$ 0.5

(2) luego se calcula $(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{k} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z\end{vmatrix}\cdot\hat{k} = \theta$ 0.5 (válido en $\rho>0$ y $\theta\in(0,2\pi)$ )

0.5

(3) Se evalúa $\iint_T \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{k}\,dA = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{2\pi}\theta\,\rho\,d\theta\,d\rho = \frac{\pi^2}{2}$ $\left(\neq \pi^2 = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)$

0.5

(b) Dado $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta\,\mathrm{sen}^3\varphi\,\hat{\theta}$, tenemos que

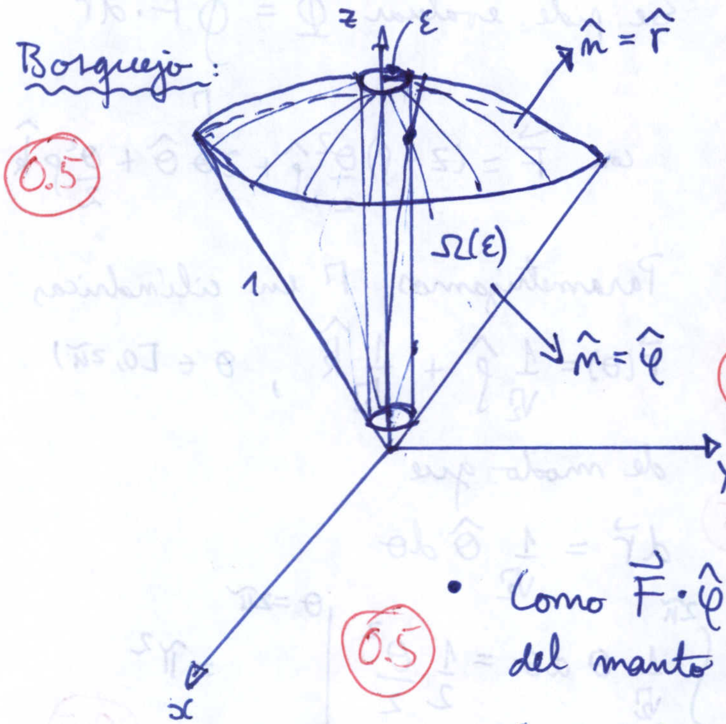
0.5 $$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, r^2\,\mathrm{sen}\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r r\theta\,\mathrm{sen}^3\varphi\right)\right]$$

$$= 4r + \mathrm{sen}^2\varphi \quad , \text{válido en } r \neq 0 \text{ y } \varphi \neq 0, \varphi \neq \tfrac{\pi}{2} \ (\text{i.e. } \vec{r} \notin \text{Eje } z).$$

Sea ahora $\Omega(\varepsilon) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \geq \varepsilon^2\}$

Bosquejo:

0.5




Sobre este dominio $\Omega(\varepsilon)$ podemos aplicar el Teo. de la Divergencia

0.5 $$\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \mathrm{div}\vec{F}\,dV = \oiint_{\partial\Omega(\varepsilon)} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

0.5

- Como $\vec{F}\cdot\hat{\varphi} = 0$, la integral de flujo a través del manto del cono es $0$.
- Sobre el casquete esférico donde $\hat{n} = \hat{r}$, se tiene $\vec{F}\cdot\hat{n} = r^2 \equiv 1$, de modo que

0.5 $$\iint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \text{Área}(\ ) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \text{Área}(\ )$$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (2-\sqrt{2})\pi.$$

0.5

- Sobre el manto del cono de radio $\varepsilon > 0$, la integral de flujo tiende a $0$ (se integra un campo acotado en una superficie cuya área tiende a $0$):

$$\left|\iint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA\right| \leq K\iint dA = K\,A(\ ) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K\,A(\ ) = 0.$$

$\rightarrow$ $\boxed{I = (2-\sqrt{2})\pi}$

(b) (Continuación)

Otro camino es después de haber encontrado la divergencia, es integrarla sobre el dominio $\Omega(\varepsilon)$ parametrizado en esféricas y después pasar al límite directamente.

Como $x^2+y^2+z^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$

$z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cancel{r}\cos\varphi \geq \cancel{r}\,\text{sen}\,\varphi$ 0.5

$\Rightarrow 0 \le tg\,\varphi \le 1 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/4$

Además

$x^2+y^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow r\,\text{sen}\,\varphi \geq \varepsilon$ 0.5

El ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ queda libre.

Notemos que $\varphi > 0$, más aún, debe tenerse que

$1 \geq r \geq \dfrac{\varepsilon}{\text{sen}\,\varphi}$, 0.5

de donde se sigue que $\text{sen}\,\varphi \geq \varepsilon \Rightarrow \varphi \geq \text{arcsen}\,\varepsilon$

De este modo

$$\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \text{div}\,\vec{F}\, dV = \int_{\text{arcsen}\,\varepsilon}^{\pi/4} \int_{\frac{\varepsilon}{\text{sen}\varphi}}^{1} \int_0^{2\pi} \text{div}\,\vec{F}\, \underbrace{dV}_{r^2 \text{sen}\varphi\, d\theta\, dr\, d\varphi}$$ 0.5

Más otros 0.5 por desarrollar y pasar al límite.

OJO: Aquí lo esencial es el planteamiento. Si está bien planteado, tiene todo el puntaje aún cuando el valor límite no se obtenga.

Obs: Consultas sobre la pauta a falvarez@dim.uchile.cl