Control 1 : MA2A2 - 2008

1.1

Pauta Problema 1

(a) Sea $S: x^2+y^2-(z-6)^2=0, \quad 3 \le z \le 6$

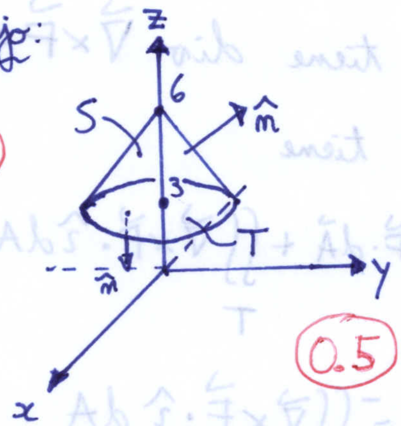
$$\Updownarrow$$

$z=6 \pm \sqrt{x^2+y^2}$ y como $z \le 6$ nos quedamos con la raíz negativa.

Además $z \ge 3 \Rightarrow x^2+y^2 \le 9$. Así $S: z=6-\sqrt{x^2+y^2}, \; x^2+y^2 \le 9$

Bosquejo:

0.5



Se pide evaluar $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$

con $\vec{F} = x(3-z)\hat{\imath} + y(3-z)\hat{\jmath} + (3-z)^2 \hat{k}$

Aplicamos el Teo. de la Divergencia:

0.5 $\quad \operatorname{div} \vec{F} = (3-z)+(3-z)+2(3-z)\cdot(-1) = 0$ en $\mathbb{R}^3$

Sea Ω la región encerrada por el cono incluyendo la tapa T: $z=3$, $x^2+y^2 \le 9$

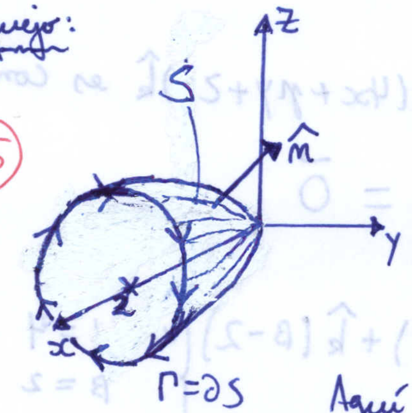
Luego $\quad 0 = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{A}$ 0.5

0.5 Pero $\vec{F} = \vec{0}$ si $z=3$ entonces $\iint_T \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$. $\quad \therefore \Phi = 0$.

(b) Sea $S: \; 2x = z^2+y^2, \; 0 \le x \le 2 \iff x = \frac{1}{2}(z^2+y^2), \; z^2+y^2 \le 4$

Bosquejo:

0.5



Se pide evaluar $\Phi = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$

con $\vec{F} = yx^2 \hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + 3y\hat{k}$

Por el Teo. de Stokes: $\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 0.5 $\quad \Gamma = \partial S$

Aquí $\Gamma: x=2, \; z^2+y^2=4$ (orientación opuesta al dibujo)

0.5 Parametrización: $\vec{r}(\theta) = 2\hat{\imath} + 2\cos\theta \hat{\jmath} + 2 \operatorname{sen}\theta \hat{k}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} [-2 \cdot 2 \operatorname{sen}\theta \hat{\jmath} + 3 \cdot 2\cos\theta \hat{k}] \cdot [-2\operatorname{sen}\theta \hat{\jmath} + 2\cos\theta\hat{k}] \, d\theta = -\int_0^{2\pi} [8\operatorname{sen}^2\theta + 12\cos^2\theta] d\theta$

0.5 (orientación)

$= -\int_0^{2\pi} [8 + 4\cos^2\theta] d\theta = -\left(16\pi + 4\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\right) = -20\pi$

(b) (Continuación)

<u>Otra alternativa</u>: Es considerar la tapa T: $x=2,\ y^2+z^2\le 4$

Por el Teo. de Stokes aplicado nuevamente:

$$\iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A \quad \oint_\Gamma \vec F\cdot d\vec A = \int_T \vec\nabla\times\vec F\cdot(-\hat\imath)\,dA$$

O bien, como por identidad se tiene $\operatorname{div}\vec\nabla\times\vec F = 0$,

por el Teo. de la divergencia se tiene

$$0 = \iiint \operatorname{div}\vec\nabla\times\vec F\,dV = \iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A + \iint_T \vec\nabla\times\vec F\cdot\hat\imath\,dA$$

En cualquier caso,
$$\iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A = -\iint_T \vec\nabla\times\vec F\cdot\hat\imath\,dA$$

Pero $$(\vec\nabla\times\vec F)\cdot\hat\imath = \begin{vmatrix}\hat\imath & \hat\jmath & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yx^2 & -xz & 3y\end{vmatrix}\cdot\hat\imath = 3+x$$ 0.5

Luego $$\iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A = -\iint_T (3+2)\,dA = -5\times A(T) = -20\pi$$ 0.5

(c) $\vec F = (x+2y+\alpha z)\hat\imath + (\beta x-3y-z)\hat\jmath + (4x+\gamma y+2z)\hat k$ es conservativo

0.5 $$\iff \vec\nabla\times\vec F = \vec 0 \iff \begin{vmatrix}\hat\imath & \hat\jmath & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix} = \vec 0$$

0.5 $$\iff \hat\imath(\gamma+1)+\hat\jmath(-4+\alpha)+\hat k(\beta-2) = \vec 0 \iff \alpha=4,\ \beta=2,\ \gamma=-1$$

1.0 <u>Potencial</u>: Buscamos g tq $\vec F = -\nabla g$ (o bien $\vec F = \nabla g$)

Integrando se obtiene $g(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + zy - z^2$ (o bien lo mismo salvo signo).

<u>Observación</u>: Si el potencial se encontró por inspección, entonces se debe verificar a posteriori que sirve.

(c) (Continuación)

Veamos el detalle de la integración:

0.5

Primero $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -F_1 \Rightarrow g(x,y,z) = -\int F_1\,dx + C_1(y,z)$

$$= -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + C_1(y,z)$$

Pero $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -F_2 \iff \cancel{-2x} + \dfrac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = \cancel{-2x} + 3y + z$

$$\Rightarrow \quad C_1(y,z) = \int (3y+z)\,dy + C_2(z) = \frac{3}{2}y^2 + yz + C_2(z)$$

0.5

Finalmente

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -F_3 \iff \frac{\partial C_2}{\partial z} = 4x - y - F_3 = \cancel{4x} \cancel{-y} \cancel{-4x} + \cancel{y} - 2z \Rightarrow C_2(z) = -z^2 + C$$

$$\therefore \quad g(x,y,z) = \frac{-x^2}{2} - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + yz - z^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Observación: Si se buscó g tq. $\vec{F} = \nabla g$, está correcto siempre que haya sido consistente con los signos.

Obs: Consultas sobre la pauta a falvarez@dim.uchile.cl