Ejercicio 1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Felipe Alvarez
Auxiliares: Emilio Vilches & Mauro Escobar
19 de Agosto de 2008

P1. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

1. Calcule la integral de trabajo del campo $(x^2 + z)\,\hat{\imath} + (y^2 + x)\,\hat{\jmath} + (z^2 + y)\,\hat{\mathrm{k}}$ a lo largo de Γ.
2. Sea $\vec{F} = \frac{1}{r}\hat{\theta} + z\hat{\mathrm{k}}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ y $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el Teorema de Stokes.

P2. Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}.$$

(a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y verifique que $\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$ sobre dicho dominio.

(b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera. Nota:Puede usar el teorema de la divergencia utilizando un volumen adecuado. En tal caso tenga especial cuidado en verificar las hipótesis del teorema.

(c) Interprete el resultado obtenido en (b).