Ejercicios Propuestos: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Felipe Alvarez
Auxiliares: Emilio Vilches & Mauro Santoro

5 de Agosto de 2008

P1. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\mathrm{rot}(\nabla\phi) = 0$.

b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$.

c) $\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}(\vec{G})$.

d) $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

e) $\mathrm{rot}(\phi\vec{F}) = \phi\ \mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla\phi \times \vec{F}$.

f) $\mathrm{div}(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g\mathrm{div}(\vec{F})$.

P2. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial diferenciable en un punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Denotemos por $J_{\vec{F}}(\vec{r}_0)$ la matriz Jacobiana de $\vec{F}$ en $\vec{r}_0$.

a) Muestre que la $J_{\vec{F}}(\vec{r}_0)$ es simétrica si y sólo si $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$.

b) Muestre que la $J_{\vec{F}}(\vec{r}_0)$ es antisimétrica si y sólo si $\mathrm{div}\vec{F} = 0$.

P3. Considere el campo $\vec{F} = r^3\widehat{r} + \exp(\varphi\cosh(r))\widehat{\varphi}$ (coordenadas esféricas). Calcule $\mathrm{div}\vec{F}$.

P4. Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho^2}\widehat{\rho} + e^{-\rho^2}\widehat{\theta} + z\widehat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Calcule $\mathrm{div}\vec{F}$ y $\mathrm{rot}\vec{F}$.

P5. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$.

(a) Probar que $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$.

(b) Los campos vectoriales $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son selenoidales y están relacionados por las ecuaciones

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{H} \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \epsilon\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

donde μ, ϵ son constantes. Probar que $\vec{E}$ y $\vec{H}$ satisfacen la ecuación diferencial:

$$\nabla^2\vec{A} = \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

P6. Sea $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, definimos un campo escalar $\phi(x) = F(\|x\|_2)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Probar que existe un campo escalar λ tal que

$$\nabla\phi(x) = \lambda(x)x \tag{1}$$

b) Recíprocamente, si ϕ y λ son campos escalares que verifican (1), con $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Probar que el campo ϕ tiene simetría radial(esto es, depende de $\|x\|_2$).

P7. Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria, $\vec{v}(t)$ la velocidad y $\vec{a}(t)$ la aceleración de una partícula de masa $m > 0$. Sea $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de fuerzas y supongamos que $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Probar que:

$$\frac{d}{dt}[m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t))$$

es decir "la tasa de cambio del momento angular es igual al torque". ¿Qué ocurre si $\vec{F}(\vec{r})$ es paralelo a $\vec{r}$.

P8. Calcular el gradiente en coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) que se relacionan con las coordenadas cartesianas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x &= \epsilon\eta\cos\phi \\ y &= \epsilon\eta\sin\phi \\ z &= \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \epsilon^2\right) \\ \epsilon{,}\eta &> 0 \;\; \phi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Identifique geométricamente las nuevas coordenadas y justifique el nombre.

P9. Calcule el gradiente de

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$