

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Cálculo Avanzado y Aplicaciones

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

APUNTES PARA EL CURSO MA2A2

Felipe Alvarez
Roberto Cominetti
Juan Diego Dávila
Héctor Ramírez C.

Primera Edición
21 de Julio 2008

Todo comentario que permita mejorar este apunte es bienvenido.

Favor enviar sus contribuciones a:

Felipe Alvarez
falvarez@dim.uchile.cl

Prefacio

El objetivo de estos apuntes es presentar los elementos básicos del cálculo vectorial y de la teoría de funciones de variable compleja, como asimismo ilustrar su utilización en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Hemos escogido un enfoque y nivel de profundidad acorde a lo que se espera para el curso de *Cálculo Avanzado y Aplicaciones*, asignatura del segundo año del Plan Común de la Carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Estos apuntes se basan en las notas escritas en colaboración con mi colega el Profesor Roberto Cominetti, y se han beneficiado de una activa participación de los Profesores Héctor Ramírez Cabrera y Juan Diego Dávila. Buena parte del material referente a la teoría de EDP se debe a este último. Agradezco a todos ellos las múltiples e interesantes discusiones que hemos tenido sobre diversos aspectos del curso.

Mis más sinceros agradecimientos a Miguel Carrasco y Claudio Pizarro, quienes en años anteriores participaron activamente en la confección de una versión previa de este apunte para el curso en aquel entonces llamado *Matemáticas Aplicadas*, al transcribir en L^AT_EX buena parte de las notas manuscritas, elaborar las figuras y sugerir varias ideas para mejorar la presentación. También debo agradecer a Regina Mateluna, secretaria del DIM, por su eficiente y siempre bien dispuesta colaboración en esta tarea.

Más recientemente, este apunte fue completamente reorganizado y actualizado por Germán Ibarra y Emilio Vilches, incorporando nuevo material y revisando cuidadosamente el que ya existía. Vayan mis agradecimientos por su excelente trabajo.

Sin perjuicio de lo anterior, la responsabilidad por los eventuales errores o inexactitudes que puedan persistir es sólo mía. Estaré muy contento de recibir cualquier comentario o sugerencia que permita mejorar este apunte en la siguiente dirección: `falvarez@dim.uchile.cl`

Finalmente, quisiera agradecer el financiamiento proporcionado por el Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile y por el proyecto Fondef IDEA+.

Felipe Alvarez
Santiago, Julio 2008

Derechos de autoría DIM

Se concede permiso para imprimir o almacenar una única copia de este documento. Salvo por las excepciones más abajo señaladas, este permiso no autoriza fotocopiar o reproducir copias para otro uso que no sea el personal, o distribuir o dar acceso a versiones electrónicas de este documento sin permiso previo por escrito del Director del Departamento de Ingeniería Matemática (DIM) de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) de la Universidad de Chile.

Las excepciones al permiso por escrito del párrafo anterior son:

- (1) Las copias electrónicas disponibles bajo el dominio uchile.cl.
- (2) Las copias distribuidas por el cuerpo docente de la FCFM en el ejercicio de las funciones que le son propias.

Cualquier reproducción parcial de este documento debe hacer referencia a su fuente de origen.

Este documento fue financiado a través de los recursos asignados por el DIM para la realización de actividades docentes que le son propias.

Distribución Semanal de los Contenidos

Semana	Tema	Unidad	Capítulos
1	Cálculo Vectorial	Divergencia, rotor y coord. ortogonales	Cap. 1
2		Integral de flujo y teorema de Gauss	Cap. 2
3		Integral de trabajo y teorema de Stokes	Cap. 3
4		Complementos sobre divergencia y teo. de Gauss	Cap. 4
5		Complementos sobre rotor y teo. de Stokes	Cap. 5
6	Variable compleja	El plano complejo y derivación compleja	Cap. 6 y 7
7		Series de potencias e integración compleja	Cap. 8 y 9
8		Fórmula de Cauchy y Teorema de los residuos	Cap. 10 y 11
9		Evaluación de integrales vía variable compleja	Cap. 12
10	Análisis de Fourier	Serie de Fourier	Cap. 13
11		Transformada de Fourier	Cap. 14
12	EDPs	Ecuaciones en Derivadas Parciales Lineales	Cap. 15
13		Separación de Variables	Cap. 16
14		Uso de transformadas en la resolución de EDPs	Cap. 17
15		Tópicos Adicionales de EDPs	Cap. 18

Índice general

I	Cálculo Vectorial	1
1.	Elementos de cálculo vectorial	3
1.1.	Campos escalares y vectoriales	3
1.2.	Operadores diferenciales del cálculo vectorial	5
1.2.1.	Divergencia, laplaciano y rotor	6
1.2.2.	Identidades vectoriales	7
1.3.	Sistemas de coordenadas ortogonales	8
1.3.1.	Triedro ortogonal y factores escalares	8
1.3.2.	Ejemplos: cilíndricas, esféricas y toroidales	10
1.3.3.	Gradiente en coordenadas ortogonales	13
1.3.4.	Divergencia y rotor en coordenadas ortogonales	15
1.4.	Ejercicios	17
1.5.	Problemas	18
2.	Integral de flujo y el teorema de Gauss	21
2.1.	Campos de normales	21
2.2.	Superficies orientables	24
2.3.	Integral de flujo de un campo vectorial	26
2.4.	El teorema de la divergencia de Gauss	30
2.5.	Ejemplos de aplicación del teorema de Gauss	33
2.6.	Ejercicios	36
2.7.	Problemas	37
2.8.	Resolución de problemas	39
3.	Integral de trabajo y el teorema de Stokes	43
3.1.	Integral de trabajo (o de línea)	43

3.2. El teorema del rotor de Stokes	47
3.3. El teorema de Green en el plano	48
3.4. Campos conservativos	49
3.5. Ejercicios	53
3.6. Problemas	55
4. Complementos sobre divergencia y teorema de Gauss	57
4.1. Caracterización límite de la divergencia	57
4.2. Fórmulas integrales de Green	58
4.3. Divergencia en coordenadas ortogonales	59
4.4. **Demostración del teorema de Gauss	61
5. Complementos sobre rotor y teorema de Stokes	65
5.1. Caracterización límite del rotor	65
5.2. Interpretación física del rotor	66
5.3. Bosquejo de la demostración del teorema de Stokes	68
5.4. Rotor en coordenadas ortogonales	69
Problemas de recapitulación	71
II Funciones de Variable Compleja	77
6. El plano complejo	79
6.1. Estructura algebraica del plano complejo	79
6.2. Estructura métrica del plano complejo	81
6.3. Representación polar y raíces de la unidad	82
7. Continuidad y derivación	85
7.1. Funciones continuas	85
7.2. Derivada compleja: condiciones de Cauchy-Riemann	86
7.3. Propiedades básicas de la derivada compleja	89
7.4. Ejercicios	91
7.5. Problemas	91
8. Funciones en serie de potencias	93
8.1. Definiciones y propiedades básicas	93

8.2. Ejemplos de funciones en serie de potencias	95
8.2.1. La función exponencial	95
8.2.2. Funciones hiperbólicas	96
8.2.3. Funciones trigonométricas	97
8.2.4. Función logaritmo	98
8.2.5. Otras funciones	100
8.3. Ejercicios	101
8.4. Problemas	102
8.5. Resolución de problemas	102
9. Integral en el plano complejo	105
9.1. Definición	105
9.2. Propiedades y ejemplos	106
9.3. El teorema de Cauchy-Goursat	112
9.4. Ejercicios	114
9.5. Problemas	115
9.6. Resolución de Problemas	116
10.Fórmula de Cauchy y primeras consecuencias	121
10.1. La fórmula de Cauchy	121
10.2. Desarrollo en serie de Taylor	122
10.3. Otras consecuencias	123
10.4. Ejercicios	125
10.5. Problemas	125
10.6. Resolución de problemas	126
11.Teorema de los residuos	129
11.1. Puntos singulares, polos y residuos	129
11.2. El teorema de los residuos	132
11.3. Ejemplos	133
11.4. Series de Laurent	138
11.5. Ejercicios	143
11.6. Problemas	145
11.7. Resolución de problemas	148

12. Evaluación de integrales vía residuos	157
12.1. Integrales de funciones trigonométricas	157
12.2. Integrales impropias sobre dominios no acotados	160
12.3. Ejercicios	170
12.4. Problemas	171
12.5. Resolución de problemas	174
III Análisis de Fourier	179
13. Series de Fourier	181
13.1. Definición	181
13.2. Convergencia	184
13.3. Propiedades y ejemplos	186
13.4. Ejercicios	188
13.5. Problemas	189
13.6. Resolución de problemas	190
14. La transformada de Fourier	193
14.1. Definición y el teorema de inversión	193
14.2. Propiedades fundamentales	195
14.2.1. La transformada de una derivada	195
14.2.2. El teorema de convolución	197
14.2.3. Compendio de propiedades de la transformada de Fourier	197
14.3. Ejemplos	198
14.4. Ejercicios	201
14.5. Problemas	201
IV Ecuaciones en Derivadas Parciales	203
15. Ecuaciones lineales de segundo orden	205
15.1. Ecuaciones parabólicas y fenómenos de difusión	205
15.1.1. Conducción del calor en una barra unidimensional	205
15.1.2. Conducción del calor en un cuerpo	207
15.1.3. Expansión de un gas en un medio isótropo y homogéneo	210

15.2. Ecuaciones hiperbólicas y fenómenos oscilatorios	210
15.2.1. Oscilaciones de una cuerda	210
15.2.2. Oscilaciones de una membrana	212
15.2.3. Vibraciones longitudinales de una barra	213
15.3. Ecuaciones elípticas y fenómenos estacionarios	213
15.3.1. Membrana en reposo	213
15.3.2. Potencial de campo eléctrico	214
15.4. Condiciones iniciales y de borde	215
15.5. Otras ecuaciones de la física	217
15.6. Principio de superposición	219
15.7. La ecuación de superficies mínimas	219
15.8. Problemas	221
15.9. Solución de problemas	223
16. Separación de Variables	225
16.1. Ejemplo modelo: ecuación del calor	225
16.1.1. Primera etapa: separar variables	225
16.1.2. Segunda etapa: imponer condiciones de borde	228
16.1.3. Tercera etapa: imponer la condición inicial	230
16.2. Aplicación en la Resolución de EDPs	231
16.2.1. Ecuación del calor en una barra finita: condiciones de borde de tipo Dirichlet	231
16.2.2. Ecuación del calor en una barra finita. Condiciones de borde de tipo Neumann	233
16.2.3. Ecuación del calor en barra finita. Condiciones mixtas	235
16.2.4. Ecuación de Laplace en banda semi-infinita.	237
16.2.5. Oscilaciones en una membrana rectangular	239
16.2.6. Ecuación de Laplace en un rectángulo	242
16.2.7. Ecuación de ondas. Cuerda finita.	244
16.3. Ejercicios	246
16.4. Problemas	246
16.5. Resolución de problemas	251
17. Uso de transformadas en la resolución de EDPs	255
17.1. Uso de la transformada de Fourier en la resolución de EDPs	255
17.1.1. Ecuación del calor en una barra infinita	255

17.1.2. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición en el extremo de tipo Dirichlet	258
17.1.3. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición de Neumann . .	259
17.1.4. Problema de Dirichlet en un semiplano	260
17.2. Uso de la transformada de Laplace	261
17.3. Ejercicios	264
17.4. Problemas	264
17.5. Resolución de problemas	268
18. Tópicos adicionales en EDPs	273
18.1. Definición de función armónica	273
18.2. Funciones armónicas conjugadas	274
18.3. Propiedad de la media y fórmula integral de Poisson	277
18.4. Propiedad de la media para funciones armónicas	279
18.5. Principio del máximo para funciones armónicas	280
18.6. Principio del máximo para la ecuación del calor	281
18.7. Unicidad para la ecuación de Laplace y el calor	283
18.8. Ejercicios	283
18.9. Problemas	284
18.10 Resolución de problemas	286
V Apéndice	289
A. Curvas en \mathbb{R}^3	291
A.1. Curvas	291
A.1.1. Reparametrización de curvas regulares	294
A.1.2. Parametrización en longitud de arco	295
A.1.3. Velocidad, rapidez y vector tangente	297
A.2. Complementos sobre curvas	298
A.2.1. Integrales sobre curvas	298
A.2.2. Curvatura y vector normal	299
A.2.3. Vector binormal y torsión	300
A.2.4. Fórmulas de Frenet	301
A.2.5. Planos de Frenet	303

A.3. Ejercicios	303
A.4. Problemas	304
A.5. Resolución de Problemas	309
B. Area e integral de superficie	311
B.1. Ejercicios	316
B.2. Problemas	317
B.3. Resolución de Problemas	319
C. Diferencial de volumen	321

Parte I

Cálculo Vectorial

Capítulo 1

Elementos de cálculo vectorial

1.1. Campos escalares y vectoriales

Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{R}^3 . Denotaremos genéricamente por \vec{r} al *vector posición* que, en coordenadas cartesianas, se escribe

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k},$$

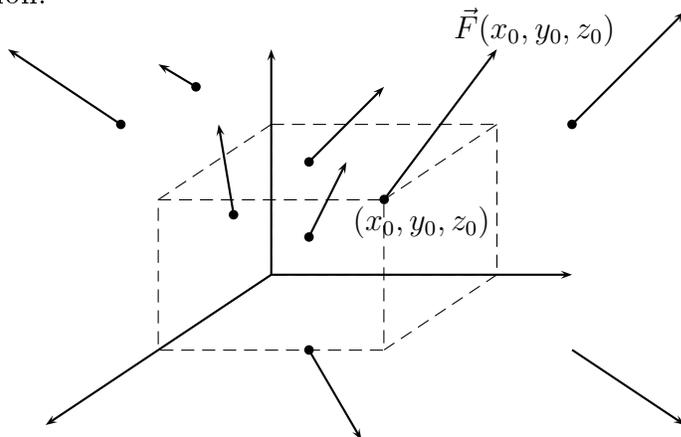
donde \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} es el triedro correspondiente a la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Llamaremos *campo escalar* sobre Ω a toda función a valores reales $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Llamamos *grafo de f* al conjunto $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^4$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el *conjunto de nivel α* de la función f como $N_\alpha(f) = \{x \in \Omega \mid f(x) = \alpha\} \subset \mathbb{R}^3$, el cual puede ser vacío. Al conjunto de nivel se le conoce *superficie de nivel* o bien como *superficie equipotencial*.

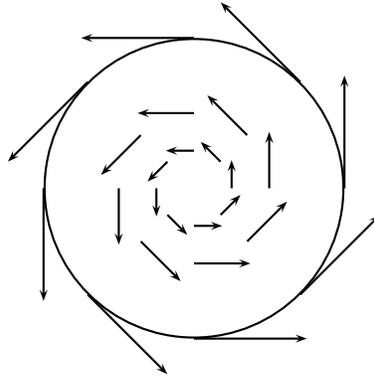
Llamaremos *campo vectorial* sobre Ω a toda función $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. En coordenadas cartesianas, escribiremos

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \hat{i} + F_2(x, y, z) \hat{j} + F_3(x, y, z) \hat{k},$$

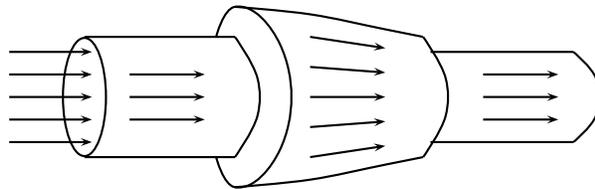
donde para cada $i = 1, 2, 3$ el correspondiente $F_i(x, y, z)$ es un campo escalar sobre Ω . Podemos representar gráficamente al campo vectorial adhiriendo a un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ el vector correspondiente $\vec{F}(x_0, y_0, z_0)$, y repetir esto para una cantidad finita de puntos, tal como se ilustra a continuación.



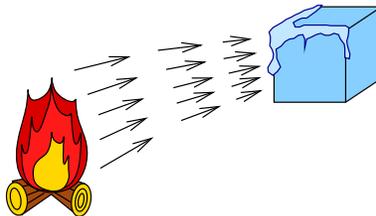
Ejemplo 1.1.1. Las partículas sobre un disco en el plano XY que gira con velocidad angular constante $\omega > 0$ y con eje de rotación dado por el eje Z , están sujetas al campo de velocidades dado por $\vec{v}(x, y, 0) = -\omega y\hat{i} + \omega x\hat{j}$.



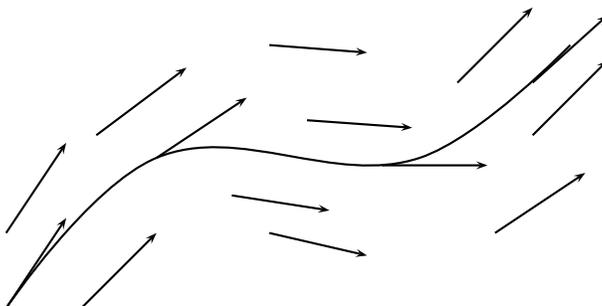
Ejemplo 1.1.2. Consideremos un fluido moviéndose en una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (por ejemplo, el interior de una tubería). Si a cada punto $(x, y, z) \in \Omega$ le asociamos la velocidad instantánea de las partículas que pasan por dicho punto, obtenemos el *campo de velocidades del fluido*: $\vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\hat{i} + v_2(x, y, z)\hat{j} + v_3(x, y, z)\hat{k}$.



Ejemplo 1.1.3. (Ley de conducción de Fourier). El calor fluye de regiones calientes a regiones frías con una velocidad \vec{J} proporcional al gradiente de temperaturas: $\vec{J} = -\kappa \nabla T(x, y, z) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} - \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}$, donde la constante $\kappa > 0$ se llama *conductividad térmica* y es una propiedad física propia del medio conductor. En consecuencia, el flujo de calor sigue localmente la dirección de máximo descenso de la temperatura, que a su vez es perpendicular a la correspondiente superficie de nivel también conocida como *isoterma*.



Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, el cual supondremos suficientemente diferenciable. Una *línea de fuerza* o *línea de flujo* es una curva cuya tangente en cada punto proporciona la dirección del campo en dicho punto.



Matemáticamente, las líneas de fuerza o flujo se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales: $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{F}(r(\vec{t}))$. Si interpretamos \vec{F} como el campo de velocidades de un fluido que ocupa cierta región Ω , y dejamos una partícula suspendida en el fluido en una posición dada, la trayectoria descrita por dicha partícula es exactamente una línea de flujo. Si \vec{F} es un campo de fuerzas que deriva de un potencial g en el sentido que $\vec{F} = -\nabla g$, entonces las líneas de fuerza atraviesan perpendicularmente las superficies equipotenciales.

1.2. Operadores diferenciales del cálculo vectorial

Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial diferenciable en un punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Sabemos que el diferencial de \vec{F} en dicho punto está representado por la matriz jacobiana:

$$J_{\vec{F}}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

En esta sección definiremos ciertos operadores diferenciales que hacen intervenir algunas de estas derivadas parciales en una forma bien particular. Como veremos en los capítulos que siguen, estos operadores son fundamentales para el desarrollo de los teoremas integrales del cálculo vectorial. Aquí nos concentraremos sólo en la operatoria involucrada, dejando para más adelante la interpretación y aplicación de estos objetos.

1.2.1. Divergencia, laplaciano y rotor

Definición 1.2.1 (Divergencia). Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el operador divergencia de \vec{F} como

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Resulta también útil la notación

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.2)$$

de modo que formalmente se tiene la relación

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}. \quad (1.3)$$

Notemos que dado $\vec{r}_0 \in \Omega$, $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}_0) = \operatorname{traza}(J_{\vec{F}}(\vec{r}_0))$.

Ejemplo 1.2.2. Dos ejemplos sencillos de campos y sus respectivas divergencias:

- Si $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} = (x, y, z)$ entonces $\operatorname{div} \vec{r} \equiv 3$.
- Si $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y) = (-\omega y, \omega x, 0)$ entonces $\operatorname{div} \vec{v} \equiv 0$. Se dice que \vec{v} es *solenoidal*, esto es, un campo cuya divergencia siempre es nula.

Un caso especial es cuando el campo vectorial corresponde al gradiente de un campo escalar:

Definición 1.2.3 (Laplaciano). Sea f un campo escalar de clase C^2 , se define el laplaciano de f como

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.4)$$

De forma análoga se puede definir el laplaciano para un campo vectorial. Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo vectorial de clase C^2 , se define el laplaciano de \vec{F} como

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \hat{i} + \Delta F_2 \hat{j} + \Delta F_3 \hat{k} \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.2.4. Si $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ entonces $\Delta f \equiv 3$.

Definición 1.2.5 (Rotor). Sea $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ un campo de clase C^1 , se define el operador rotor de \vec{F} como:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Usando la notación (1.2) podemos escribir el rotor de un campo \vec{F} como sigue:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 1.2.6. Veamos ahora los rotadores de los campos del ejemplo 1.2.2:

- Si $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ entonces $\operatorname{rot} \vec{r} \equiv \vec{0}$. Se dice que \vec{r} es *irrotacional*, esto es, un campo cuyo rotor es siempre el vector nulo.
- Si $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y) = (-\omega y, \omega x, 0)$ entonces $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\omega \hat{k}$.

Observación 1.2.7. *Todo campo vectorial de clase C^1 que deriva de un potencial es irrotacional, esto es, si $\vec{F} = -\nabla g$ en Ω para algún potencial g de clase C^2 sobre Ω , entonces $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$ en Ω . En efecto,*

$$\operatorname{rot}(\nabla g) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) \hat{k} = \vec{0}.$$

Aquí hemos usado que cada una de las componentes es nula por la igualdad de las derivadas cruzadas, lo que a su vez es cierto en virtud del Teorema de Schwartz (recordemos que hemos supuesto que g es de clase C^2 , de modo que sus segundas derivadas parciales son continuas).

1.2.2. Identidades vectoriales

Sean los campos vectoriales $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y los campos escalares $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, todos suficientemente diferenciables. Se tienen las siguientes identidades cuya demostración se deja al lector:

1. $\forall c \in \mathbb{R}, \operatorname{div}(c\vec{F} + \vec{G}) = c \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$.
2. $\forall c \in \mathbb{R}, \operatorname{rot}(c\vec{F} + \vec{G}) = c \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{rot} \vec{G}$.
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ (*i.e.* el rotor de un campo vectorial es solenoidal).
4. $\operatorname{rot} \nabla f = \vec{0}$ (*i.e.* el gradiente de un campo escalar es irrotacional).
5. $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$.
6. $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = f \operatorname{rot} \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.
7. $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$.

$$8. \operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0.$$

$$9. \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g.$$

$$10. \vec{\nabla} \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f.$$

$$11. \Delta \vec{F} = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}).$$

$$12. \operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} \operatorname{div} \vec{G} - \vec{G} \operatorname{div} \vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}.$$

$$13. \nabla(\vec{F} \cdot \vec{F}) = 2(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + 2\vec{F} \times (\operatorname{rot} \vec{F}).$$

$$14. \nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times \operatorname{rot} \vec{G} + \vec{G} \times \operatorname{rot} \vec{F}.$$

Observación 1.2.8. En las tres últimas identidades se usa la notación

$$(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} = \vec{F} \cdot (\nabla G_1) \hat{i} + \vec{F} \cdot (\nabla G_2) \hat{j} + \vec{F} \cdot (\nabla G_3) \hat{k},$$

donde $\vec{G} = G_1 \hat{i} + G_2 \hat{j} + G_3 \hat{k}$.

1.3. Sistemas de coordenadas ortogonales

Las coordenadas cartesianas no siempre son las más cómodas para describir objetos geométricos y campos escalares o vectoriales. De hecho, en diversas ocasiones el problema en estudio posee ciertas simetrías que no se ven reflejadas al utilizar estas coordenadas. En esta sección discutiremos otros sistemas de coordenadas que serán útiles en varios contextos.

1.3.1. Triedro ortogonal y factores escalares

En general, un sistema de coordenadas curvilíneas es una transformación invertible suficientemente diferenciable $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de modo que a todo triplete $(u, v, w) \in D$ le corresponde un único punto en el espacio

$$\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Además suponemos que la matriz jacobiana del sistema de coordenadas es no singular, esto es,

$$J_{\vec{r}}(u_0, v_0, w_0) = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \mid \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \mid \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \right]_{3 \times 3}$$

es una matriz invertible para cada $(u_0, v_0, w_0) \in D$.

Asociado al sistema de coordenadas curvilíneo, en cada punto se define un triedro de vectores unitarios de la siguiente manera: fijemos $(u_0, v_0, w_0) \in D$ y consideremos la curva parametrizada por $u \mapsto \vec{r}(u, v_0, w_0)$. Como la matriz jacobiana del sistema es invertible, en particular

$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \right\| \neq 0$, y por lo tanto el vector tangente a la curva en el punto $\vec{r}(u_0, v_0, w_0)$ está bien definido y se expresa como

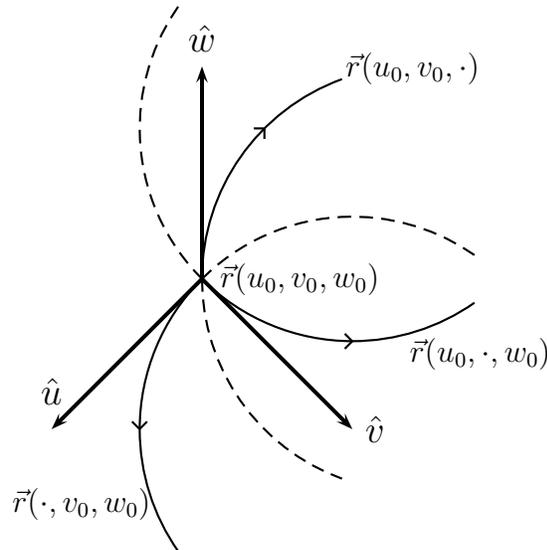
$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \right\|$$

Evidentemente, \hat{u} puede depender de (u_0, v_0, w_0) pero no explicitaremos esta dependencia para simplificar la notación. Similarmente, como $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) \right\| \neq 0$ y $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \right\| \neq 0$, los vectores tangentes \hat{v} y \hat{w} a las curvas parametrizadas por $v \mapsto \vec{r}(u_0, v, w_0)$ y $w \mapsto \vec{r}(u_0, v_0, w)$ están bien definidos. Más aún, nuevamente en virtud de la invertibilidad de la matriz jacobiana en todo punto, se tiene que el triedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ es linealmente independiente por lo que constituye una base normalizada de \mathbb{R}^3 .

Definición 1.3.1 (Sistema ortogonal). *Se dice que el sistema de coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$, $(u, v, w) \in D$, es ortogonal si los vectores unitarios del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ definidos por*

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad \hat{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|. \quad (1.6)$$

son mutuamente ortogonales para cada $(u, v, w) \in D$.



Observación 1.3.2. *Consideraremos sólo sistemas de coordenadas ortogonales. Sin embargo, en otros contextos puede ser de interés considerar sistemas de coordenadas curvilíneas más generales.*

Finalmente, llamaremos *factores escalares* a los siguientes valores reales:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|. \quad (1.7)$$

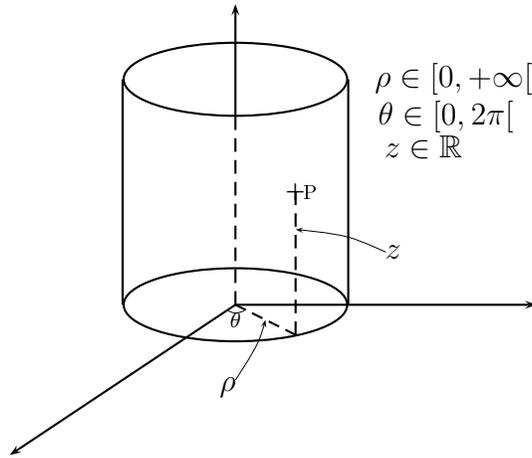
De esta forma por definición se tiene que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \hat{v}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \hat{w}.$$

1.3.2. Ejemplos: cilíndricas, esféricas y toroidales

Coordenadas cilíndricas

Para este sistema de coordenadas la posición de un punto \vec{P} en el espacio queda determinada por tres variables, ρ , θ y z , como muestra la siguiente figura:



Entonces, la relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas viene dada por

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (x(\rho, \theta, z), y(\rho, \theta, z), z(\rho, \theta, z)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Recíprocamente, a un punto descrito por los valores x , y e z , en coordenadas cartesianas, le corresponden los siguientes valores en coordenadas cilíndricas

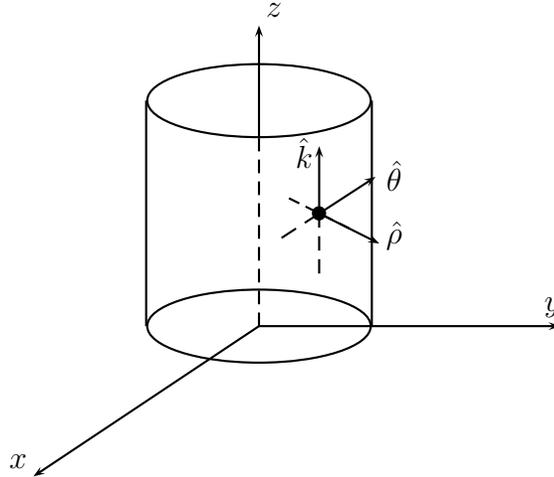
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z.$$

Calculemos los factores escalares y el triedro unitario asociado a este sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \Rightarrow h_\rho = 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \Rightarrow h_\theta = \rho, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1) \Rightarrow h_z = 1, \end{aligned}$$

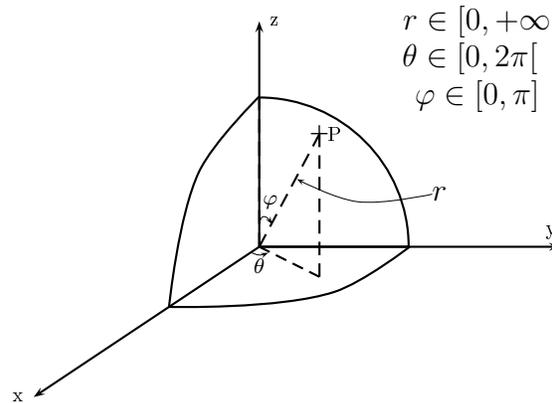
obteniendo finalmente que el triedro es:

$$\hat{\rho} = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \hat{z} = \hat{k} = (0, 0, 1).$$



Coordenadas esféricas

Un tipo de geometría que aparece con frecuencia en las aplicaciones es la geometría esférica. Para el sistema de coordenadas ligado a esta geometría, la posición de un punto \vec{P} está determinada por un radio r y dos ángulos θ y φ , como se muestra en la figura.



$$\begin{aligned} r &\in [0, +\infty[\\ \theta &\in [0, 2\pi[\\ \varphi &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

Así tenemos la siguiente representación para un punto descrito usando los valores r , θ y φ :

$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi).$$

Recíprocamente, para un punto dado en coordenadas cartesianas, es decir descrito usando x , y y z , se tiene la relación

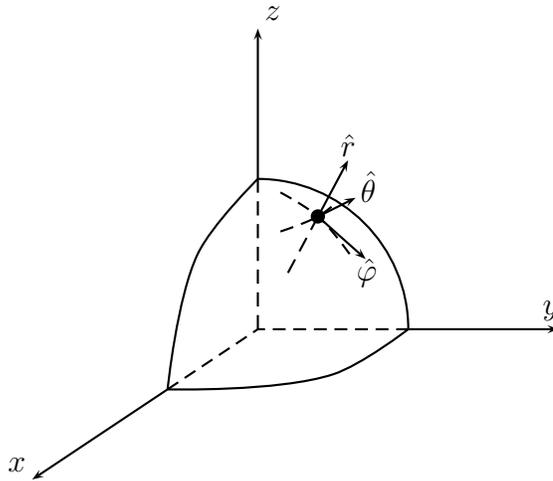
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right).$$

Calculemos los factores escalares y el triedro unitario

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi) \Rightarrow h_r = 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (-r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, 0) \Rightarrow h_\theta = r \operatorname{sen} \varphi, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{sen} \varphi) \Rightarrow h_\varphi = r, \end{aligned}$$

obteniendo

$$\hat{r} = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \cos \varphi), \quad \hat{\theta} = (-\text{sen } \theta, \cos \theta, 0), \quad \hat{\varphi} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \text{sen } \theta, -\text{sen } \varphi).$$

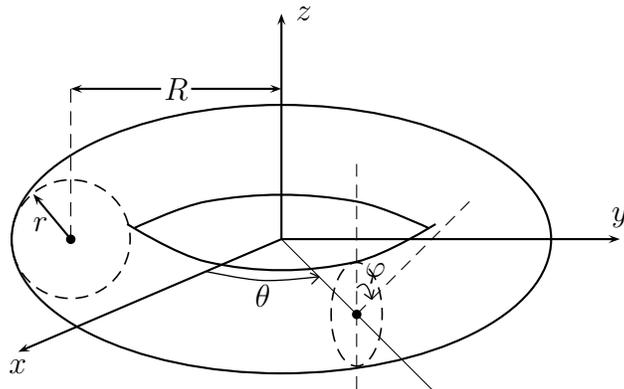


Observación 1.3.3. *Notemos que para seguir la convención conocida como la regla de la mano derecha para el producto cruz entre dos miembros sucesivos del triedro, es conveniente ordenar las variables como r , φ y θ , quedando asimismo el propio triedro ordenado de la forma \hat{r} , $\hat{\varphi}$ y $\hat{\theta}$. Esto motiva que algunos autores prefieran intercambiar el nombre de los ángulos en relación a lo adoptado aquí. Por esta razón se sugiere que el lector tenga la precaución de siempre verificar primero cuál es el nombre que el autor ha dado a cada ángulo antes de seguir un desarrollo que involucre coordenadas esféricas.*

Coordenadas toroidales

Este nuevo sistema no corresponde exactamente a la noción de sistema de coordenadas definida anteriormente, pues no permiten describir el espacio \mathbb{R}^3 completo. Sin embargo, el análisis anterior sigue siendo válido.

En estas coordenadas, dado un radio mayor R fijo, la posición de un punto \vec{P} queda determinada por un radio menor r y dos ángulos θ y φ como muestra la figura.



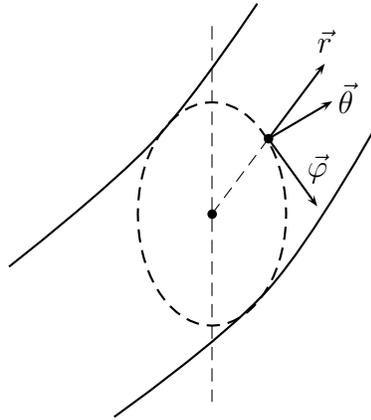
El vector posición viene dado por:

$$\vec{r}(r, \varphi, \theta) = ((R + r \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta, (R + r \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi), \quad r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, 2\pi).$$

Entonces, los vectores unitarios y los factores escalares resultan ser:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi), & h_r &= 1; \\ \hat{\varphi} &= (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{sen} \varphi), & h_\varphi &= r; \\ \hat{\theta} &= (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0), & h_\theta &= (R + r \operatorname{sen} \varphi). \end{aligned}$$

Es fácil verificar al igual que en los casos anteriores, los vectores del triedro \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ son mutuamente ortogonales.



1.3.3. Gradiente en coordenadas ortogonales

En las aplicaciones, muchas magnitudes escalares se expresan de manera natural como una función descrita en un sistema de coordenadas curvilíneas distinto al cartesiano. Un ejemplo sencillo es el potencial gravitacional engendrado por una partícula de masa M que se encuentra en el origen. Su expresión en coordenadas cartesianas es

$$V(x, y, z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

mientras que en esféricas se tiene simplemente

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Resulta entonces interesante obtener expresiones para los operadores diferenciales fundamentales de campos escalares o vectoriales en términos de un sistema de coordenadas ortogonales $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ con $(u, v, w) \in D$. En esta sección veremos el caso específico del gradiente de una función diferenciable $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $(u, v, w) \in D$ tal que $\vec{r}(u, v, w) \in \Omega$. Para simplificar la notación, no escribiremos explícitamente la dependencia en u, v y w . Como el triedro $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ es ortonormal y en particular es una base de \mathbb{R}^3 , podemos escribir

$$\nabla f(\vec{r}) = (\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{u})\hat{u} + (\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{v})\hat{v} + (\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{w})\hat{w}.$$

Ahora bien, por definición de los factores escalares, tenemos en particular que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}$$

de modo tal que

$$\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{u} = \frac{1}{h_u} \nabla f(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}.$$

Pero por la regla de la cadena

$$\nabla f(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (f \circ \vec{r}),$$

de donde se concluye que

$$\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (f \circ \vec{r}).$$

Razonando de manera similar con las otras componentes, deducimos que

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w}. \quad (1.8)$$

Notemos que en el caso de las coordenadas cartesianas, lo anterior corresponde a la expresión habitual para el gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}.$$

(i) **Coordenadas cilíndricas:** si $f = f(\rho, \theta, z)$ entonces

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}. \quad (1.9)$$

(ii) **Coordenadas esféricas:** si $f = f(r, \theta, \varphi)$ entonces

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}. \quad (1.10)$$

Ejemplo 1.3.4. Volvamos al ejemplo del potencial gravitacional $V = -\frac{GM}{r}$. El campo de fuerzas generado por este potencial viene dado por $\vec{F} = -\nabla V$, que de acuerdo a la expresión (1.10), se escribe en coordenadas esféricas como sigue $\vec{F}(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$.

Observación 1.3.5. En general, hemos deducido que si $g : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces $g(r)$, como función en el sistema de coordenadas esféricas representado por sus componentes (r, θ, φ) , tiene como gradiente a la función $\nabla g(\vec{r}) = g'(r) \hat{r}$.

1.3.4. Divergencia y rotor en coordenadas ortogonales

De manera análoga a lo realizado para el gradiente de un campo escalar, es posible obtener expresiones para la divergencia y el rotor de un campo vectorial en coordenadas ortogonales. En esta sección nos limitaremos a proporcionar estas expresiones sin entrar en mayores detalles en cómo se deducen. Posteriormente, en los capítulos 4 y 5, veremos cómo obtener estas expresiones a partir de los teoremas de integración fundamentales del cálculo vectorial.

Sea ahora un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en el abierto Ω con $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w) \in \Omega$ para $(u, v, w) \in D$. Definamos

$$\begin{aligned} F_u &= F_u(u, v, w) := \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{u}(u, v, w), \\ F_v &= F_v(u, v, w) := \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{v}(u, v, w), \\ F_w &= F_w(u, v, w) := \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{w}(u, v, w). \end{aligned}$$

Eliminando la dependencia explícita en u, v y w , podemos entonces escribir

$$\vec{F} = F_u \hat{u} + F_v \hat{v} + F_w \hat{w}.$$

Ejemplo 1.3.6. El campo gravitacional se puede escribir en coordenadas cartesianas como

$$\vec{F} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}),$$

mientras que en coordenadas esféricas es simplemente

$$\vec{F} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

de modo que en este caso $F_r = -\frac{GM}{r^2}$, $F_\theta = 0$ y $F_\varphi = 0$.

Divergencia en coordenadas ortogonales:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right] \quad (1.11)$$

Reescribamos el operador divergencia en los sistemas de coordenadas más usuales:

(I) **Coordenadas esféricas:** si $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi}$, como $h_r = 1$, $h_\theta = r \sin \varphi$, $h_\varphi = r$, se tiene

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (F_r r^2 \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi r \sin \varphi) \right]. \quad (1.12)$$

(II) **Coordenadas cilíndricas:** si $\vec{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k}$, como $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$, $h_z = 1$, se tiene

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (F_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (F_z \rho) \right].$$

Rotor en coordenadas ortogonales:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial v} F_w h_w - \frac{\partial}{\partial w} F_v h_v \right] \hat{u} + \frac{1}{h_u h_w} \left[\frac{\partial}{\partial w} F_u h_u - \frac{\partial}{\partial u} F_w h_w \right] \hat{v} + \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} F_v h_v - \frac{\partial}{\partial v} F_u h_u \right] \hat{w}.$$

Observación 1.3.7. Aquí se asume que el triedro \hat{u} , \hat{v} y \hat{w} (en ese orden) está orientado de modo que se satisface la regla de la mano derecha, i.e. $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w}$, $\hat{v} \times \hat{w} = \hat{u}$ y $\hat{w} \times \hat{u} = \hat{v}$.

La fórmula (1.13) suele reescribirse de manera abreviada como

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}, \quad (1.13)$$

que corresponde formalmente a $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ con

$$\nabla = \hat{u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \hat{v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \hat{w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Observación 1.3.8. La notación para el rotor como un determinante es muy útil como regla mnemotécnica. Sin embargo, ésta debe ser aplicada directamente, evitando usar las propiedades del determinante para factorizar filas o columnas. La razón es que en general esas propiedades no son ciertas cuando intervienen operadores diferenciales, en este caso las derivadas parciales, junto con productos de funciones que dependen de las variables con respecto a las cuales se está derivando, en cuyo caso el orden de los factores sí puede alterar el producto.

Escribamos el rotor en coordenadas esféricas y cilíndricas.

(I) **Coordenadas esféricas:** si $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\varphi \hat{\varphi} + F_\theta \hat{\theta}$, se tiene (ver observaciones 1.3.3 y 1.3.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\varphi} & r \sin \varphi \hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_r & r F_\varphi & r \sin \varphi F_\theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta r \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\varphi r) \right] \hat{r} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \varphi} \left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (F_\theta r \sin \varphi) \right] \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (F_\varphi r) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\theta}. \end{aligned}$$

(II) **Coordenadas cilíndricas:** si $\vec{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k}$, se tiene se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\theta) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{k}. \end{aligned}$$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. Dibuje las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, conocida como silla de montar.

Ejercicio 1.4.2. Describa las líneas de fuerza del campo gravitacional:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = -\frac{GM}{\|\vec{r}\|^2}\hat{r}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Encuentre las superficies de nivel (equipotenciales) para el potencial gravitacional correspondiente y verifique que las líneas de fuerza las intersectan perpendicularmente.

Ejercicio 1.4.3. Encuentre las líneas de flujo de los campos $(-y, x)$ y $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Ejercicio 1.4.4. Considere el potencial gravitacional:

$$V(\vec{r}) = -\frac{GM}{\|\vec{r}\|} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}$$

Verifique, usando directamente (1.1), que $\Delta V \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Ejercicio 1.4.5. Verifique que

$$\text{rot}(\vec{F}) = \text{div}(\vec{F} \times \hat{i})\hat{i} + \text{div}(\vec{F} \times \hat{j})\hat{j} + \text{div}(\vec{F} \times \hat{k})\hat{k}.$$

Ejercicio 1.4.6. Muestre la validez de cada una de las identidades de la sección 1.2.2. Una vez que haya mostrado que una de ellas es cierta, puede usarla para verificar las siguientes.

Ejercicio 1.4.7. Un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 se dice *central* si es radial y depende sólo de la distancia al origen, esto es, si el campo se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r)\hat{r}, \quad r > 0,$$

para alguna función $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Ejemplos típicos de esta clase son el campo eléctrico inducido por una carga puntual en el origen y el campo gravitacional generado por una masa puntual en el origen. En ambos casos el origen constituye una singularidad que se excluye del dominio.

1. Muestre que todo campo central \vec{F} es irrotacional, *i.e.* $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$.
2. Verifique que si $\vec{F} = \phi(r)\hat{r}$ entonces

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2).$$

Deduzca que un campo central \vec{F} es solenoidal (*i.e.* a divergencia idénticamente nula) en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ si y sólo si

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2}\hat{r},$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$. Concluya que todo campo central solenoidal admite un potencial de la forma $V(r) = \frac{K}{r} + C$ para ciertas constantes K y C .

Ejercicio 1.4.8. Diremos que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene *simetría cilíndrica* si puede escribirse en coordenadas cilíndricas como

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \quad \rho > 0,$$

para alguna función $F_\rho : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 .

1. Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.
2. Verifique que si $\vec{F} = F_\rho(\rho)\hat{\rho}$, entonces

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (F_\rho \rho).$$

Deduzca que un campo \vec{F} con simetría cilíndrica es solenoidal en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$ si y sólo si

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\rho} \hat{\rho},$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$. Pruebe que todo campo solenoidal con simetría cilíndrica admite un potencial de la forma $U(\rho) = K \ln \rho + C$ para ciertas constantes K y C .

Ejercicio 1.4.9. Encuentre expresiones para el laplaciano de un campo escalar en coordenadas cilíndricas y esféricas.

1.5. Problemas

Problema 1.1. Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x, \rho, \theta) = (x, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ y $\rho \geq 0$.

- (a) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$. ¿Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\rho}$.
- (b) Encuentre expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas.
- (c) Dada una función no-negativa y diferenciable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r}_1(x, \theta) = x\hat{i} + f(x)\hat{\rho}$.

Problema 1.2.¹

(a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 . Demuestre que

$$\operatorname{rot} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \operatorname{rot} \varphi(\vec{r}, t) dt.$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\vec{r}, t) dt$ donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y u representa cualquier variable cartesiana.

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ y pruebe que

$$\operatorname{rot}[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt} \vec{F}(t\vec{r}). \quad (1.14)$$

(c) Sea ahora \vec{F} un campo cualquiera tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ en una bola B de \mathbb{R}^3 centrada en el origen. Entonces se puede probar (no se pide que lo haga) que (1.14) es válida en B . Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] dt$. Usando lo anterior concluya que $\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{F}$ en B .

Problema 1.3.² Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencia de un campo gravitacional

$$\rho \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla p = -\rho g \hat{k}.$$

(a) Demuestre la identidad vectorial

$$\nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

(b) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible (ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli

$$\frac{\rho}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = \text{constante.}$$

(c) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura h . En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\epsilon \ll R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario, e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.

¹Control 1. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

²Control 3. Primavera 1997. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

Capítulo 2

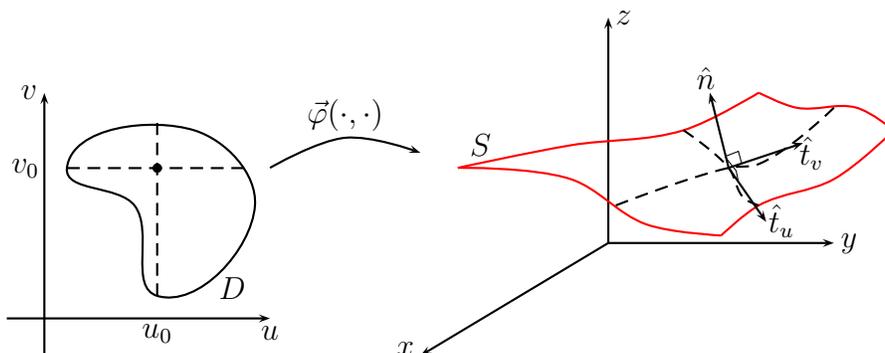
Integral de flujo y el teorema de Gauss

2.1. Campos de normales

Recordemos que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama *superficie* si existe una función continua $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S = \{\vec{\varphi}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$, donde, para evitar situaciones patológicas, suponemos que $\overline{D} = \text{int}(D)$ y que $\text{int}(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un *dominio* no vacío, esto es, un conjunto abierto y conexo¹. La función $\vec{\varphi}$ se llama *parametrización* de la superficie. Llamaremos *suave* a una superficie que admite una parametrización continuamente diferenciable (*i.e.* de clase \mathcal{C}^1), en cuyo caso diremos que la parametrización es ella misma suave. Una superficie se dirá *suave por pedazos* si admite una parametrización continua de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Diremos también que una superficie es *simple* si admite una parametrización inyectiva.

Consideremos una superficie suave y simple $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con parametrización $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave e inyectiva. Para un punto $(u_0, v_0) \in \text{int}(D)$, en vecindades de u_0 y v_0 , respectivamente, las funciones $u \mapsto \vec{\varphi}(\cdot, v_0)$ y $v \mapsto \vec{\varphi}(u_0, \cdot)$ definen curvas sobre S . Supongamos que $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \neq 0$ y $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \neq 0$ en el punto (u_0, v_0) . Definimos los *vectores tangentes* a S en el punto $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \right\|; \quad \hat{t}_v = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|.$$



¹Un conjunto se dice conexo si no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos.

Diremos que la parametrización $\vec{\varphi}$ asociada a la superficie S es *regular* si los vectores tangentes \hat{t}_u y \hat{t}_v son linealmente independientes. En tal caso, llamaremos *plano tangente* al plano generado por \hat{t}_u y \hat{t}_v , y definiremos el *vector normal* a S en $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ como

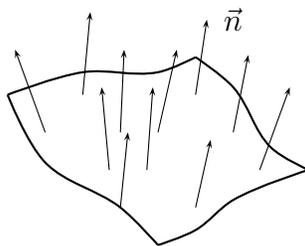
$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\|\hat{t}_u \times \hat{t}_v\|}. \quad (2.1)$$

Los vectores \hat{t}_u y \hat{t}_v pueden no ser ortogonales, razón por la cual en general es necesario normalizar en (2.1). Diremos que una superficie es *regular* si admite una parametrización $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es regular en todo punto $(u, v) \in \text{int}(D)$, y que es *regular por pedazos* si se descompone en una unión finita de superficies regulares.

Definición 2.1.1 (Campo de normales). Si S es regular y $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales \hat{n} sobre S mediante

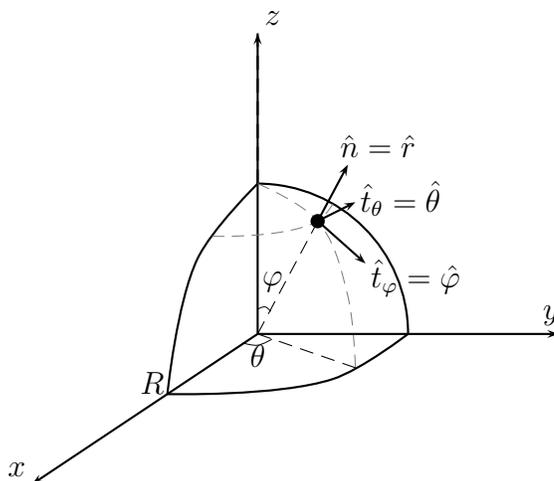
$$\hat{n}(u, v) := \frac{\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)}{\|\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)\|} = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v) \right\|},$$

donde identificamos $\hat{n}(u, v)$ con la normal $\hat{n}(\vec{\varphi}(u, v))$ a la superficie S en el punto $\vec{\varphi}(u, v)$.



Observación 2.1.2. Dada una superficie regular, los vectores tangentes dependen de la parametrización regular específica que se escoja para hacer los cálculos. Sin embargo, se puede demostrar que el vector normal es único salvo por el signo². En consecuencia, el plano tangente es único.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el hemisferio superior del casquete esférico de radio $R > 0$ y centro en el origen:



²Para obtener el campo de normales de signo opuesto basta con intercambiar los roles de las variables u y v .

Una primera parametrización en coordenadas cartesianas es

$$\vec{\varphi}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}), \quad (x, y) \in \overline{D}(0, R) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

En coordenadas esféricas podemos usar

$$\vec{\varphi}_2(\varphi, \theta) = R\hat{r} = (R \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, R \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

Luego, los vectores tangentes son simplemente

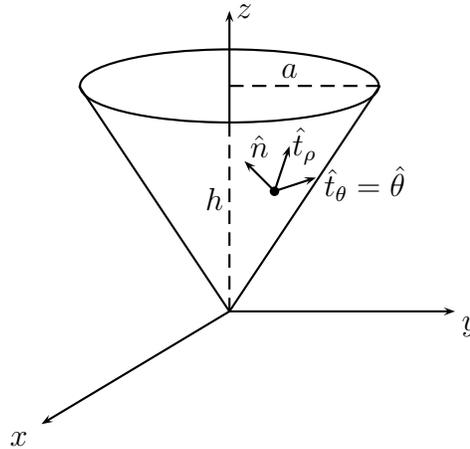
$$\hat{t}_\theta = \hat{\theta} \quad \text{y} \quad \hat{t}_\varphi = \hat{\varphi},$$

y en consecuencia el vector normal es

$$\hat{n} = \hat{\varphi} \times \hat{\theta} = \hat{r}.$$

Notemos que si invertimos el orden de las variables φ y θ , considerando como nueva parametrización $\vec{\varphi}_3(\theta, \varphi) := \vec{\varphi}_1(\varphi, \theta)$, podemos tomar ahora $u = \theta$ y $v = \varphi$ para obtener como campo de normales $\hat{n} = \hat{\theta} \times \hat{\varphi} = -\hat{r}$, que resulta ser el opuesto al anterior.

Ejemplo 2.1.4. Tomemos ahora el caso del manto (sin la tapa) de un cono invertido de radio $a > 0$ y altura $h > 0$, con eje de simetría dado por el eje Z y vértice en el origen:



Algunas posibles parametrizaciones son:

$$\vec{\varphi}_1(x, y) = \left(x, y, \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (x, y) \in \overline{D}(0, a),$$

$$\vec{\varphi}_2(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}}(ra \cos \theta, ra \operatorname{sen} \theta, rh), \quad r \in [0, \sqrt{h^2 + a^2}], \theta \in [0, 2\pi),$$

$$\vec{\varphi}_3(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, \rho h/a) = \rho \hat{\rho} + (\rho h/a) \hat{k}, \quad \rho \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi).$$

Estas tres parametrizaciones se obtienen usando coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas, respectivamente. Notemos $\vec{\varphi}_2$ y $\vec{\varphi}_3$ son suaves incluso en el vértice del cono, mientras que $\vec{\varphi}_1$ no es diferenciable en dicho punto. Sin embargo, ninguna de las tres parametrizaciones es regular

en el vértice, lo que es consistente con nuestra idea intuitiva de que no es posible definir de manera única un plano tangente en dicho punto.

Usemos $\vec{\varphi}_3 = \vec{\varphi}_3(\rho, \theta)$ para encontrar un campo de normales al manto del cono excepto en el vértice, de modo que suponemos que $\rho > 0$. Es directo verificar que en este caso los vectores tangentes están dados por:

$$\hat{t}_\rho := \frac{\hat{\rho} + (h/a)\hat{k}}{\sqrt{1 + (h/a)^2}} = \frac{a\hat{\rho} + h\hat{k}}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad \text{y} \quad \hat{t}_\theta = \hat{\theta}.$$

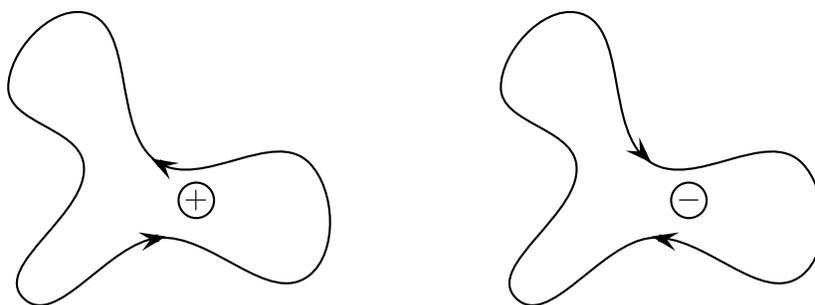
El lector observará que $\hat{t}_\rho \neq \hat{\rho}$ en este caso. Finalmente, como \hat{t}_ρ y \hat{t}_θ resultaron ser ortogonales (pues $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ y \hat{k} es un triedro ortonormal), el campo de normales sobre el manto es

$$\hat{n} = \frac{a\hat{\rho} \times \hat{\theta} + h\hat{k} \times \hat{\theta}}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a\hat{k} - h\hat{\rho}}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

2.2. Superficies orientables

Escoger una *orientación* para un plano significa definir una noción de *movimiento positivo* a lo largo de las curvas cerradas, regulares y simples contenidas en dicho plano (ver el apéndice A). De hecho, dado un plano de vector normal constante dado, este último define una orientación que obedece a la convención popularmente conocida como *la regla de la mano derecha*: se extiende la mano derecha de modo que el pulgar quede perpendicular a los restantes dedos, entonces, si el pulgar indica el sentido del vector normal al plano, al cerrar los otros dedos sobre la palma de la mano se obtiene la orientación positiva.

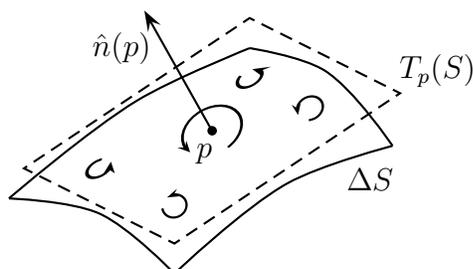
Por ejemplo, si consideramos el plano XY de vector normal constante e idénticamente igual a \hat{k} , entonces la regla de la mano derecha impone el escoger la orientación positiva como aquella obtenida al recorrer la curva en sentido *antihorario* (i.e. contrario a las manecillas del reloj), tal como se ilustra en la siguiente figura:



Más generalmente, escoger una orientación sobre una superficie S en una vecindad de un punto $p \in S$ corresponde a una noción de movimiento positivo para curvas cerradas (regulares y simples) suficientemente pequeñas de modo que pertenezcan a la vecindad. Si es posible repetir lo anterior para todo punto $p \in S$ de modo que las orientaciones coincidan en la intersección de cualquier par de vecindades, entonces se dice que *la superficie es orientable*. Esto último es una

propiedad de carácter global para la superficie. Intuitivamente, en una superficie orientable es posible distinguir dos caras: aquella vista desde la orientación positiva y la cara opuesta.

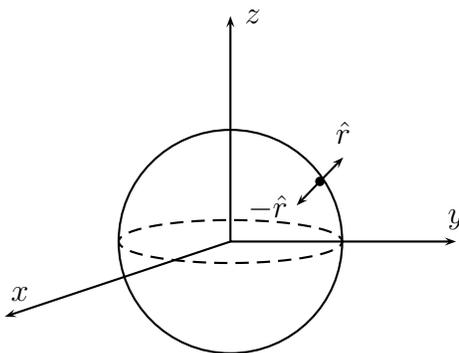
Si la superficie S es regular, es natural inducir una orientación local sobre S en torno a un punto $p \in S$ a partir de la orientación sobre el plano $T_p(S)$ tangente a S en p , orientación esta última que está dada por el vector normal $\hat{n}(p)$ de acuerdo a la regla de la mano derecha. Así, localmente el vector normal permite distinguir entre las dos caras de un elemento de superficie.



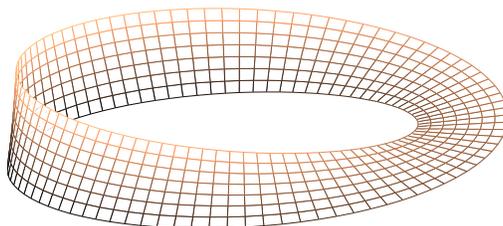
Sin embargo, la regularidad de la superficie no es suficiente para que sea automáticamente orientable en el sentido global.

Definición 2.2.1 (Superficie regular orientable). *Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuando éste quede bien definido globalmente como una función continua sobre toda la superficie.*

Ejemplo 2.2.2. El casquete esférico unitario es orientable. De hecho, puede orientarse globalmente según \hat{r} (normal exterior a la esfera) o bien según $-\hat{r}$ (normal interior a la esfera).



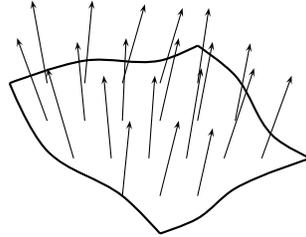
Ejemplo 2.2.3. La *banda de Möbius*, que se muestra en la siguiente figura, no es orientable. ¿Puede explicar por qué?



Cuando S sea una superficie cerrada y orientable, diremos que S está orientada según la normal *exterior* si la normal apunta, para todo punto de la superficie, en dirección contraria al volumen encerrado por la superficie, y diremos que está orientada según la normal *interior* en caso contrario.

2.3. Integral de flujo de un campo vectorial

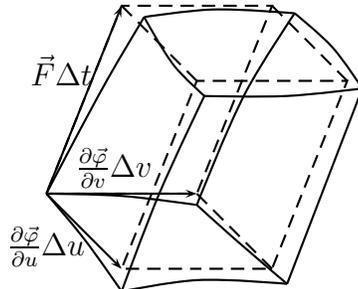
Consideremos un fluido sometido a un campo de velocidades \vec{F} y una superficie S inmersa en este fluido como se muestra en la siguiente figura:



Supondremos que S es una superficie regular *orientable* (ver definición 2.2.1), cuyo campo de vectores normales es denotado por \hat{n} . Sea además $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular de esta superficie S , entonces la cantidad $\vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \hat{n}(u, v)$ representa la rapidez, en la dirección normal, con que las partículas que pasan por el punto $\vec{\varphi}(u, v) \in S$ atraviesan S . Si esta rapidez es cero, significa que la velocidad sólo tiene una componente tangencial a la superficie, en cuyo caso las partículas no pasan a través de ella en ese punto.

De esta forma, en un pequeño lapso de tiempo Δt , la cantidad de volumen de líquido que atraviesa un pequeño elemento de superficie ΔS de área dada por ΔA , es aproximadamente igual a

$$\Delta V \simeq [\vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \hat{n}] \Delta t \Delta A.$$



Como $\Delta A \simeq \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$, de la definición del campo normal \hat{n} obtenemos que

$$\Delta V \simeq \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right] \Delta u \Delta v \Delta t,$$

cuyo lado derecho no es otra cosa que el volumen del paralelepípedo descrito por los vectores $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \Delta u$, $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \Delta v$ y $\vec{F} \Delta t$. Formalmente, sumando sobre todos los elementos de superficie y pasando al límite se obtiene la siguiente fórmula para el *caudal* (volumen por unidad de tiempo) instantáneo que atraviesa la superficie S en el sentido del campo de normales dado por la parametrización:

$$\text{Caudal instantáneo a través de } S := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{TOTAL}}{\Delta t} = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right] dudv$$

Observemos que con las identificaciones

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|} \quad \text{y} \quad dA = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv,$$

podemos entonces escribir lo siguiente:

$$\text{Caudal instantáneo a través de } S = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA.$$

Definición 2.3.1 (Integral de flujo). Sean S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S , y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S . Definimos la integral de flujo del campo \vec{F} a través de la superficie S orientada según \hat{n} mediante

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} := \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right] dudv, \quad (2.2)$$

donde $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es, tal que

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|}.$$

Para interpretar correctamente el valor de la integral de flujo es necesario especificar el campo de normales \hat{n} . Por ejemplo, si orientamos un casquete esférico usando la normal exterior $\hat{n} = \hat{r}$, la integral de flujo corresponde al flujo neto que sale de la esfera a través del casquete. Si este valor fuese negativo, significa que lo que sale de la esfera no alcanza para compensar lo que entra, y por lo tanto existe un caudal neto positivo que entra a la esfera.

Notemos que si la densidad del líquido no fuera uniforme sino que viniese dada por el campo escalar $\rho(x, y, z)$, entonces el *flujo masivo* a través de la superficie S está dada por

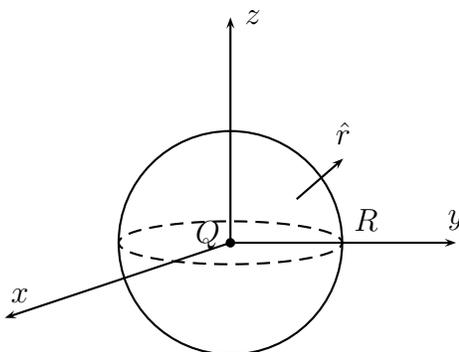
$$\Phi_m = \iint_S \rho \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_D \rho(\vec{\varphi}(u, v)) F(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u, v) \right] dudv.$$

Esto no es otra cosa que la integral de flujo a través de S orientada según \hat{n} del campo $\rho \vec{F}$.

Observación 2.3.2. Si S es una superficie regular orientada según un campo de normales \hat{n} , y si S^- es la misma superficie pero con la orientación opuesta $-\hat{n}$, entonces se tiene que

$$\iint_{S^-} \vec{F} \cdot d\vec{A} = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Ejemplo 2.3.3. Procederemos a calcular el flujo del campo eléctrico generado por una carga Q en el origen, a través del manto de la esfera $S(\vec{0}, R)$ orientado según la normal exterior.



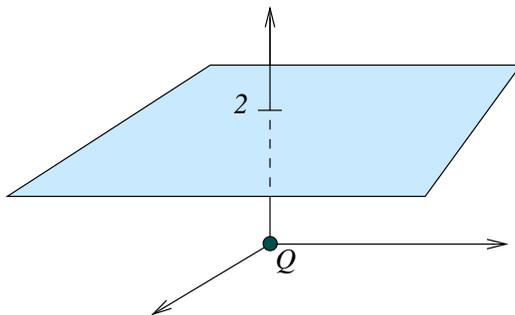
Recordemos que el campo eléctrico producido por la carga Q viene dado por

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2},$$

para una constante universal ϵ_0 . De esta forma se obtiene el siguiente flujo eléctrico Φ :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \iint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} R^2 \sin\varphi d\varphi d\theta = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ejemplo 2.3.4. Procederemos a calcular el flujo del campo eléctrico generado por una carga Q en el origen, sobre el plano infinito $z = 2$.



En este caso la normal es constante $\hat{n} = \hat{k}$. Dado que

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3},$$

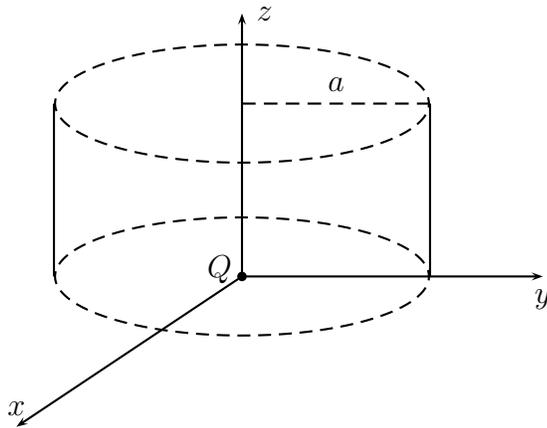
obtenemos que el flujo eléctrico Φ viene dado por

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot \hat{k} dx dy = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}^3} dx dy,$$

y vía un cambio de variables a coordenadas polares se deduce que

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4}^3} r d\theta dr = \frac{Q}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} (4 + r^2)^{-3/2} r dr = \frac{Q}{\epsilon_0} [-(4 + r^2)^{-1/2}] \Big|_0^{\infty} = \frac{Q}{2\epsilon_0}.$$

Ejemplo 2.3.5. Repitamos el ejemplo anterior pero ahora sobre el manto (sin las tapas) del cilindro infinito $x^2 + y^2 = a^2$, $z \in \mathbb{R}$.



Usaremos coordenadas cilíndricas, de esta forma se tiene que $\hat{n} = \hat{\rho} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ y

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\hat{\rho} + z\hat{k}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}^3}.$$

Por lo tanto el flujo eléctrico Φ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a\hat{\rho} + z\hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}^3} \cdot \hat{\rho} \right) a d\theta dz \\ &= \frac{Q}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{z}{a})^2}^3} \frac{dz}{a} \\ &= \frac{Q}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}^3} du = \frac{Q}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(\tau)} d\tau = \frac{Q}{2\epsilon_0} \operatorname{tgh}(\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Notemos que el último cambio de variables fue $u = \sinh \tau$, obteniendo $du = \cosh \tau d\tau$. El lector notará que el resultado es independiente del valor de $a > 0$.

2.4. El teorema de la divergencia de Gauss

El teorema de la divergencia de Gauss es un resultado fundamental del cálculo vectorial. Formalmente, consiste en una expresión del tipo

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV \quad (2.3)$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\partial\Omega$ es una superficie cerrada regular por pedazos orientada según la normal exterior a la región Ω .

La fórmula (2.3) extiende al caso vectorial el *Teorema Fundamental del Cálculo* para funciones de una variable, el cual establece que para una función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

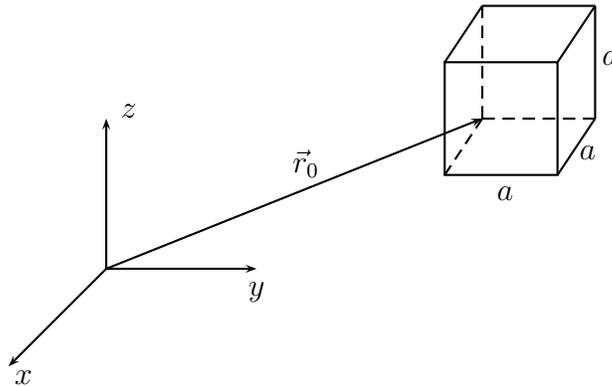
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Antes de enunciar con precisión el teorema de la divergencia, motivemos la obtención de la expresión dada en (2.3) para un caso muy simple: un cubo de aristas paralelas a los ejes.

Más precisamente, supongamos que el conjunto Ω viene dado por el cubo de lado $a > 0$ y vértice $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\overline{\Omega} = \mathcal{Q} = [x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + a] \times [z_0, z_0 + a], \quad (2.4)$$

como se ve en la siguiente figura:



Llamemos S_i a las 6 superficies regulares asociadas a las caras de este cubo, caracterizando cada superficie S_i mediante la normal exterior a cada una de ellas como sigue:

$$S_1 : \hat{n} = \hat{i}; \quad S_2 : \hat{n} = \hat{j}; \quad S_3 : \hat{n} = \hat{k}; \quad S_4 : \hat{n} = -\hat{i}; \quad S_5 : \hat{n} = -\hat{j}; \quad S_6 : \hat{n} = -\hat{k}. \quad (2.5)$$

Definamos la superficie cerrada y regular por pedazos siguiente:

$$S = \partial\mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^6 S_i, \quad (2.6)$$

a la cual asignaremos la orientación dada por la normal exterior.

Para todo campo vectorial \vec{F} continuo en un dominio que contenga al cubo \mathcal{Q} se tiene

$$\iint_{\partial\mathcal{Q}} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{A}. \quad (2.7)$$

Analicemos la integral anterior asumiendo que el campo es continuamente diferenciable y que se escribe como

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}.$$

Consideremos en particular el caso de las superficies opuestas S_3 y S_6 . Para la primera se tiene

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{k} dA = \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} F_3(x, y, z_0 + a) dy dx,$$

mientras que para la segunda tenemos

$$\iint_{S_6} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_6} \vec{F} \cdot (-\hat{k}) dA = - \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} F_3(x, y, z_0) dy dx.$$

Sumando ambas integrales se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} [F_3(x, y, z_0 + a) - F_3(x, y, z_0)] dy dx \\ &= \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} \int_{z_0}^{z_0+a} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) dz dy dx. \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado el Teorema Fundamental del Cálculo. Repitiendo el procedimiento anterior para el resto de las superficies S_i y sumando todos los resultados parciales se obtiene en definitiva que

$$\iint_{\partial\mathcal{Q}} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\mathcal{Q}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \iiint_{\mathcal{Q}} \operatorname{div}(\vec{F}) dV, \quad (2.8)$$

que coincide exactamente con la expresión (2.3) aplicada a esta situación.

Si (2.3) fuese válido sólo para cubos de aristas paralelas a los ejes, ciertamente este resultado no tendría el mismo interés que si pudiésemos aplicarlo a otros tipos de volúmenes.

El teorema de la divergencia de Gauss justamente establece que es posible aplicar la misma fórmula para regiones mucho más generales que un cubo.

Teorema 2.4.1 (Gauss). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 sobre un abierto $\mathcal{U} \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV.$$

Observación 2.4.2. *El teorema de la divergencia es también válido en dominios no acotados siempre que las integrales sean convergentes.*

Finalicemos esta sección con un bosquejo de demostración del teorema de Gauss. Comencemos por dividir la región Ω del enunciado en una unión finita de cubos, con la excepción que se da en la frontera de Ω , donde los pequeños volúmenes colindantes a ésta tienen algún lado que no es vertical (ver la figura 2.1).

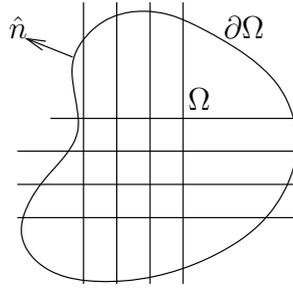


Figura 2.1: División de Ω en cubos

Llamemos $\{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^n$ a esta división. Notemos que entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^n \iint_{\partial\mathcal{Q}_i} \vec{F} \cdot d\vec{A}, \quad (2.9)$$

puesto que las integrales sobre las caras interiores se anulan mutuamente cuando \mathcal{Q}_i es un cubo, en virtud de que las respectivas normales de dos cubos adyacentes son opuestas. Gracias a la relación (2.8) que es válida para todo \mathcal{Q}_i que sea cubo, se obtiene lo siguiente:

$$\iint_{\partial\mathcal{Q}_i} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\mathcal{Q}_i} (\operatorname{div} \vec{F}) dV, \quad \text{para todo } \mathcal{Q}_i \text{ cubo.} \quad (2.10)$$

En el caso que el volumen \mathcal{Q}_i no sea exactamente un cubo, ya que intersecta la frontera de Ω , es posible argumentar rotando los ejes y escribiendo la parte de la frontera de \mathcal{Q}_i que no sea paralela a los ejes como el grafo de funciones convenientes, para deducir que la relación (2.10) también vale para estos \mathcal{Q}_i . Finalmente, en virtud de (2.9), se deduce la validez del teorema.

En la sección 4.4, que el lector puede omitir en una primera lectura de este apunte, se presenta en detalle una variante de este esquema de demostración.

2.5. Ejemplos de aplicación del teorema de Gauss

En esta sección presentamos algunas aplicaciones simples que ilustran la utilización del teorema de la divergencia de Gauss.

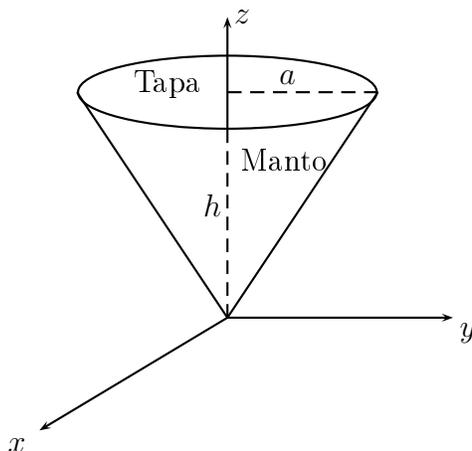
Ejemplo 2.5.1. Aplicando el teorema 2.4.1 al campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} = (x, y, z)$, se obtiene la siguiente expresión para el volumen de una región Ω que satisface las condiciones del enunciado de dicho resultado:

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \vec{r} \cdot d\vec{A}.$$

Es interesante hacer notar que esta expresión hace intervenir sólo una integral doble sobre $\partial\Omega$ en lugar de una triple sobre todo Ω .

Ejemplo 2.5.2. El teorema de la divergencia puede ser útil para calcular indirectamente flujos a través de superficies que no necesariamente son cerradas.

A modo de ejemplo, supongamos que se desea calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} \equiv -\vec{k}$ a través del manto (sin la tapa) del cono invertido de radio a y altura h que se muestra en la siguiente figura:



Si “tapamos” el cono incluyendo la tapa, entonces podemos aplicar el teorema de la divergencia de Gauss para obtener:

$$\iint_{\text{Manto} \cup \text{Tapa}} -\hat{k} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\text{Cono}} \text{div}(-\hat{k}) dv = \iiint_{\text{Cono}} 0 dv = 0.$$

Por lo tanto, por aditividad de la integral de flujo, se obtiene para el manto orientado según la normal exterior al cono que:

$$\iint_{\text{Manto}} -\hat{k} \cdot d\vec{A} = - \iint_{\text{Tapa}} -\hat{k} \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{Tapa}} \hat{k} \cdot \hat{k} dA = \pi a^2,$$

donde usamos que el campo de normales exteriores al cono sobre la tapa está dado por $\hat{n} \equiv \hat{k}$.

Ejemplo 2.5.3. Supongamos que la temperatura de una región Ω de \mathbb{R}^3 está dada por

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Supongamos que dicha región contiene a la esfera $S(\vec{0}, R)$ centrada en el origen y de radio R . Queremos calcular el flujo de calor que sale a través del casquete esférico $\partial S(\vec{0}, R)$ en función de la conductividad térmica $\kappa > 0$ del material. Para este caso se tiene que el campo de temperaturas (instantáneo) asociado a este potencial queda definido como

$$\vec{J} = -\kappa \nabla T.$$

Entonces, el flujo de calor asociado es

$$\Phi = \iint_{\partial S(\vec{0}, R)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iiint_{S(\vec{0}, R)} \operatorname{div}(\vec{J}) dV = - \iiint_{S(\vec{0}, R)} \kappa \Delta T dV = -6\kappa \iiint_{S(\vec{0}, R)} dV = -8\kappa\pi R^3.$$

Obtenemos un valor negativo, lo que es coherente con el hecho de que la temperatura decrece hacia el origen de modo que el flujo neto de calor que “sale” de la esfera es negativo.

Ejemplo 2.5.4. (Ley de Gauss para el flujo eléctrico). Consideremos el campo eléctrico generado por una carga puntual Q situada en el origen:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^3 de frontera regular por pedazos $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior. Supongamos que $\vec{0} \notin \partial\Omega$ de modo que la integral de flujo

$$\Phi = \iint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

está bien definida. Queremos evaluar Φ en términos de Q y otros parámetros que puedan intervenir.

Comencemos por observar que \vec{E} , por ser un campo central, es a divergencia nula en todo el espacio salvo el origen. Para esto basta aplicar el ejercicio 1.4.7 o bien calcular la divergencia de \vec{E} usando, por ejemplo, la expresión de este operador en coordenadas esféricas (1.12).

Si el dominio no encierra al origen, esto es, cuando $\vec{0} \notin \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ entonces podemos aplicar directamente el teorema 2.4.1 para concluir que

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) dV = 0.$$

El caso interesante es precisamente cuando $\vec{0} \in \Omega$. En efecto, el abierto más grande donde \vec{E} es diferenciable es $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, y por lo tanto si $\vec{0} \in \Omega$ entonces $\Omega \not\subseteq \mathcal{U}$ y por lo tanto no se

satisface la hipótesis sobre el dominio de diferenciabilidad del campo requerida por el teorema de la divergencia.

La idea para abordar el caso $\vec{0} \in \Omega$ es reducirse a calcular el flujo a través de un casquete esférico donde el resultado se obtiene directamente (ver el ejemplo 2.3.3). Para esto, procedemos como sigue: tomemos $r_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(\vec{0}, r_0) \subset \Omega$ y definamos $\Omega' = \Omega \setminus \overline{B(\vec{0}, r_0)}$, de modo tal que se tenga $\vec{0} \notin \Omega' \cup \partial\Omega'$ (ver la figura 2.2). Para el dominio modificado Ω' estamos entonces en la situación anterior, y por lo tanto se tiene por el teorema de la divergencia que

$$\iint_{\partial\Omega'} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0,$$

donde \hat{n} es la normal exterior a Ω' .

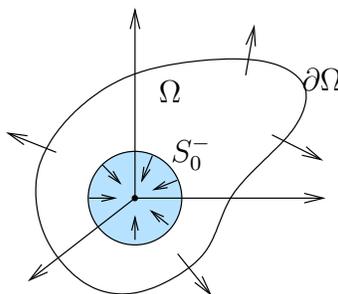


Figura 2.2: Región de integración para la Ley de Gauss

Ahora observemos que

$$\partial\Omega' = \partial\Omega \cup \partial B(\vec{0}, r_0).$$

Para simplificar la notación, escribamos $S_0 = \partial B(\vec{0}, r_0)$. Esta superficie se puede orientar según la normal interior a la bola $B(\vec{0}, r_0)$ es decir $-\hat{r}$, lo que denotamos por S_0^- , o bien según la normal exterior \hat{r} , en cuyo caso escribimos S_0^+ . Ahora bien, sobre S_0 la normal exterior al dominio Ω' es precisamente la interior a la bola $B(\vec{0}, r_0)$, es decir $\hat{n} = -\hat{r}$ en S_0 .

Lo anterior implica que

$$0 = \iint_{\partial\Omega'} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \iint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \iint_{S_0^-} \vec{E} \cdot \hat{n} dA,$$

de donde deducimos que

$$\Phi = \iint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \iint_{S_0^-} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_0^+} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Para la última igualdad utilizamos el cálculo directo sobre un casquete esférico orientado según la normal exterior a la esfera (ver ejemplo 2.3.3).

2.6. Ejercicios

1. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del disco definido por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad z = 12,$$

y orientado según la normal superior \hat{k} .

2. Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x - y \cos z, y - x, z - e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z , centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0 > r_0$).

3. Calcular la integral de flujo $\iint_{\Sigma} \nabla \Phi \cdot d\vec{A}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete

elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y Φ es el campo escalar $\Phi(x, y, z) = (x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 + z^2$.

4. Calcular la integral de flujo del campo $\vec{F} = 2x\hat{i} + yx\hat{j} + zx\hat{k}$ a través del triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$. Precise la orientación.

5. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + \hat{k}$ a través del manto del paraboloides en coordenadas cilíndricas $z = 4 - \rho^2$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, orientado según la normal interior.

6. Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z \sin y + xy^2z, e^x \cos z + x^2yz, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

Indicación: Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia). Calcule el flujo a través de las tapas directamente.

7. El empuje total que ejerce el agua sobre un objeto de superficie S está dado por

$$G = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

con

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, \rho g(h - z)) & \text{si } z \leq h \\ (0, 0, 0) & \text{si } z > h \end{cases}$$

donde g es el módulo de la aceleración de gravedad, ρ es la densidad del agua y h es la altura del nivel del agua. Demuestre que G es igual al peso del volumen de agua desplazado por el objeto.

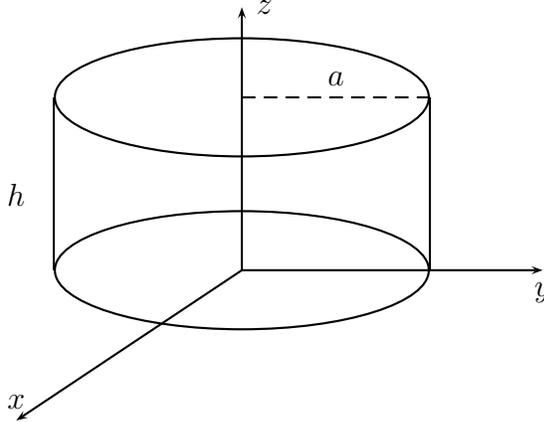
8. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x + y), y + \cos(x + y), \sqrt{x^2 + y^2} + 2z \sin(x + y))$. Calcule el flujo de este campo a través de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \leq 0$, orientada según la normal interior.

9. Sea el campo $\vec{F}(x, y, z) = (2x+2, 4y-4, 2z)$. Calcular el flujo de \vec{F} a través del hemisferio superior del casquete elipsoidal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

orientado según la normal *interior*.

10. Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (e^z \operatorname{sen} y + xy^2z, e^x \cos z + x^2yz, x^2e^z)$ a través del manto del cilindro de la figura, orientado según la normal exterior.



11. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} = xy^2\hat{i} + yz^2\hat{j} + zx^2\hat{k}$ a través de la superficie del sólido definido por las ecuaciones: $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 5$.
12. Sea \vec{F} el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(zx + \operatorname{sen}(x - y), y - \operatorname{sen}(x - y), \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}z^2 - 2z \cos(x - y) \right).$$

Calcule el flujo de \vec{F} a través del casquete semi-esférico (sin tapa) dado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z > 0$. Precise el sentido de orientación escogido para los cálculos.

2.7. Problemas

Problema 2.1. Considere el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

y la región Ω definida por: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \in [0, b]$ y $x^2 + y^2 = a^2$, con a y b constantes dadas, ambas positivas.

- (a) Evalúe las integrales de flujo del campo sobre cada una de las 5 caras de la región. Haga un bosquejo y considere la orientación exterior.
- (a) Interprete físicamente los 5 flujos calculados, así como el flujo total a través de Ω .

Problema 2.2.³ Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + e^{-\theta^2} \hat{k}.$$

- Determine el dominio de diferenciabilidad de \vec{F} y verifique que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ sobre dicho dominio.
- Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de \vec{F} a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera. Nota: Puede usar el teorema de la divergencia utilizando un volumen adecuado. En tal caso tenga especial cuidado en verificar las hipótesis del teorema.
- Interprete el resultado obtenido en (b).

Problema 2.3.⁴ Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima del plano $z = 2y$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y\}$.

- Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie.
- Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 + z^2)\hat{i} + (e^{-x^2} - 2)\hat{j} + (2e^{-x^2} + 1)\hat{k}$$

sobre la superficie S orientada con la normal exterior a la esfera.

Problema 2.4.⁵ Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$ y sea S la superficie de la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- Muestre que el vector normal \hat{n} a la superficie S en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es paralelo al campo \vec{F} .
- Sea $D(x_0, y_0, z_0)$ la distancia desde el origen al plano tangente a la elipsoide en (x_0, y_0, z_0) . Pruebe que $D = 1/\vec{F} \cdot \hat{n}$ en S .
- Demuestre que

$$\int \int_S \frac{1}{D} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

Indicación: Recuerde que el volumen de la elipsoide antes descrita es igual a $\frac{4\pi}{3}abc$.

³Control 1. Primavera 2000. Matemáticas Aplicadas.

⁴Control 1. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁵Control 1. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

Problema 2.5.⁶ Supongamos que un fluido está sometido a un campo de velocidades dado por $\vec{F}(x, y, z) = (x - yz)\hat{i} + (y + xz)\hat{j} + (z + 2xy)\hat{k}$. Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sea S_2 la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Sea Ω el volumen limitado por S_1 y S_2 .

- Calcule $\int \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ con \vec{n} la normal interior al cilindro. Interprete el resultado.
- Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto que pasa a través de las paredes de la región Ω .
- Calcule directamente el flujo a través de S_2 orientada según la normal exterior a la esfera. Compare con lo obtenido en (a) y (b). En cada caso interprete los resultados y explicita: el sistema de coordenadas y el correspondiente vector posición que utiliza, la parametrización, el campo de normales y los elementos de superficie o volumen según corresponda.

Problema 2.6.⁷ Considere la superficie del toro de centro 0, radio mayor R y radio menor a ($a < R$). Sea Σ la porción de la superficie del toro que se encuentra fuera de la esfera de centro 0 y radio R .

- Bosqueje la superficie Σ .
- Calcular el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

a través de Σ orientada según la normal exterior al toro.

Problema 2.7.⁸ Considere el campo $\vec{F} = r^3\hat{r} + \exp(\varphi \cosh(r))\hat{\varphi}$ (coordenadas esféricas).

- Calcule $\nabla \cdot \vec{F}$.
- Calcule el flujo del campo \vec{F} a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq h$ (sin la tapa).

2.8. Resolución de problemas

Solución Problema 2.1

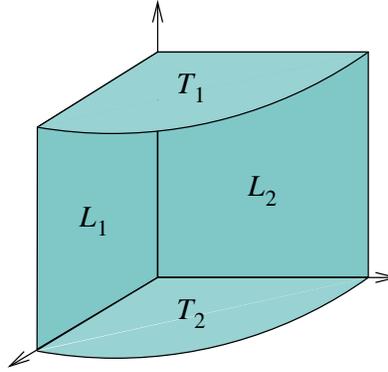
Recordamos la definición de flujo:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{F}(\vec{\sigma}(u, v)) \cdot \hat{n} \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\| dudv$$

⁶Control 2. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁷Control 1. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas.

⁸Control 2. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas.



Con $\partial\Omega$ la superficie que encierra al volumen Ω , σ una parametrización de esa superficie, \vec{F} el campo y \hat{n} la normal en la que orientamos el campo (casi siempre usaremos la exterior).

Procedemos entonces a parametrizar convenientemente cada cara de Ω de modo de calcular el flujo en cada cara:

- L_1 : parametrizamos un rectángulo, en $y = 0$:

$$\vec{\sigma}(x, z) = (x, 0, z) \quad (x, z) \in [0, a] \times [0, b]$$

y nuestra normal exterior es $\hat{n} = -\hat{j}$, luego:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (0, xz, 0) \cdot (-(0, 1, 0)) dx dz &= \int_0^a \int_0^b -xz dx dz \\ &= -\int_0^a x \frac{b^2}{2} dx = -\left(\frac{ab}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Lo que significa que dado como orientamos el flujo (exteriormente), a través de L_1 esta **entrando** flujo.

- L_2 : parametrizamos un rectángulo, en $x = 0$:

$$\vec{\sigma}(y, z) = (0, y, z) \quad (y, z) \in [0, a] \times [0, b]$$

y nuestra normal exterior es $\hat{n} = -\hat{i}$, luego:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (yz, 0, 0) \cdot (-(1, 0, 0)) dy dz &= \int_0^a \int_0^b -yz dy dz \\ &= -\int_0^a y \frac{b^2}{2} dy = -\left(\frac{ab}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Lo que significa que dado como orientamos el flujo (exteriormente), a través de L_1 esta **entrando** flujo también.

- T_1 : Usamos coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\sigma}(r, \theta) = r\hat{\rho} + b\hat{k} \quad (\theta, r) \in [0, \frac{\pi}{2}][0, a]$$

y en este caso, nuestra normal exterior es \hat{k} , entonces nuestra integral:

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r \cos(\theta)}_x \underbrace{r \operatorname{sen}(\theta)}_y \underbrace{r}_{|||} d\theta dr = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{2} a^4 d\theta$$

Esto pues, las coordenadas del campo en los ejes x e y se anulan al hacer \cdot con la normal, se sigue que:

$$= -\frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2\theta) d\theta = -\frac{a^4}{4} \left(\frac{\cos(2\theta)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{a^4}{8}$$

- T_2 : Usamos coordenadas cilíndricas de nuevo:

$$\vec{\sigma}(r, \theta) = r\hat{\rho} \quad (\theta, r) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, a]$$

y en este caso, nuestra normal exterior es $-\hat{k}$, entonces nuestra integral, análogamente al caso anterior:

$$- \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) d\theta dr = -\frac{a^4}{8}$$

Pues la integral es la misma salvo un signo. Este calculo podría haberse evitado, pues viendo los signos de ambos flujos calculados, en T_1 **sale** flujo, mientras que en T_2 **entra** flujo, por lo tanto, en suma se anulan, y esto es porque en ambas superficies, que son simétricas, el campo también es simétrico (pues no depende de z), luego solo diferirá lo calculado por los signos de las normales por las cuales orientamos el campo para calcular.

- Manto: Claramente, la buena idea es usar otra vez las coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = a\hat{\rho} + z\hat{k} \quad (\theta, z) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, b]$$

podemos ver que geoméricamente, la normal exterior al manto es $\hat{\rho}$ (calcularlo explícitamente), de este modo nuestra integral es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b (az \operatorname{sen} \theta, az \cos \theta, a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \cdot (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) adz d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b 2a^2 z \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 b^2 \operatorname{sen}(2\theta) d\theta = \frac{a^2 b^2}{2}$$

lo que significa que por el Manto, **sale** flujo, sumando a los flujos que entran por L_1 y L_2 , se obtiene que el flujo total a través de Ω es cero!

Capítulo 3

Integral de trabajo y el teorema de Stokes

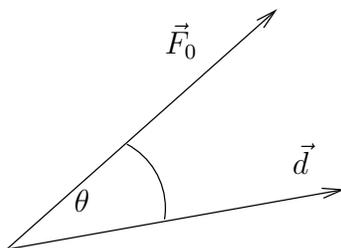
En todo lo que sigue supondremos que el lector está familiarizado con las nociones de curva suave, parametrización, curvas y parametrizaciones regulares, reparametrizaciones equivalentes, orientación de una curva y otros conceptos relacionados (ver el apéndice A).

3.1. Integral de trabajo (o de línea)

Se define el *trabajo realizado* por una fuerza constante \vec{F}_0 a lo largo de una trayectoria rectilínea descrita por un vector desplazamiento \vec{d} como

$$W = \vec{F}_0 \cdot \vec{d} = \|\vec{F}_0\| \|\vec{d}\| \cos \theta,$$

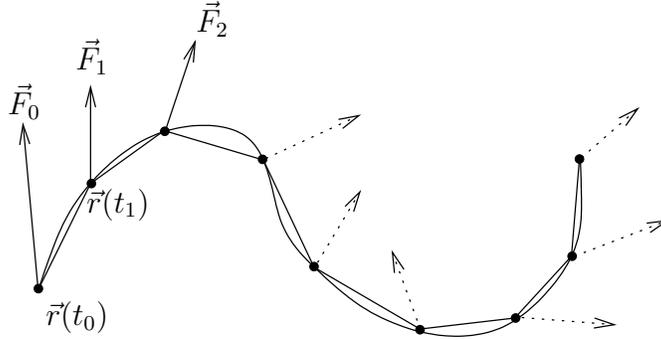
donde θ es el ángulo entre estos vectores.



En el caso general de un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ que no es constante y/o de una trayectoria curvilínea Γ parametrizada por $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, el trabajo total realizado por el campo de fuerzas a lo largo de la trayectoria se puede aproximar por la suma

$$W \simeq \sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot (\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)), \quad (3.1)$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$.



Intuitivamente, cuando el paso de la partición $\Delta(\{t_i\}) = \max_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i)$ tiende a cero, la suma anterior debería converger a un valor que representa el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de la curva Γ parametrizada por $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

En efecto, se puede demostrar que si la parametrización es suave (de clase \mathcal{C}^1) y si el campo de fuerzas \vec{F} es continuo sobre un abierto Ω que contiene a Γ , entonces la suma en (3.1) converge hacia el valor dado por la integral

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt.$$

Esto nos motiva para introducir la siguiente definición:

Definición 3.1.1 (Integral de trabajo o de línea). *Sea Γ una curva simple y regular, y sea $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos la integral de trabajo (o integral de línea) de \vec{F} sobre la curva $\Gamma \subseteq \Omega$ por*

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt,$$

donde $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ .

Si $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$, se suele usar la notación

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Cuando la curva Γ es cerrada, entonces se suele escribir

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

y esta integral recibe el nombre de *circulación de \vec{F} a lo largo de Γ* . Si \vec{F} representa el campo de velocidades de un fluido, la circulación es la integral de la componente tangencial de la velocidad a lo largo de la curva cerrada Γ , proporcionando la cantidad neta de *giro del fluido* alrededor de Γ .

Observación 3.1.2. Es posible verificar que la integral de trabajo no depende de la parametrización regular \vec{r} elegida, salvo por el cambio de signo que se produce cuando se considera una parametrización que invierte la orientación de la curva Γ . Más precisamente, si denotamos por Γ^- la misma curva pero con la orientación opuesta, entonces se tiene:

$$\int_{\Gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Observación 3.1.3. Una curva Γ se dirá regular por pedazos si se puede descomponer en la unión de un número finito de curvas regulares $\Gamma = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$, donde cada par de segmentos distintos a lo más tiene en común los extremos. Notemos que la integral de trabajo puede ser trivialmente definida para una curva $\Gamma = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$ regular por pedazos, de la manera siguiente:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Cada segmento Γ_i debe ser recorrido de manera consistente con la orientación de la curva.

Ejemplo 3.1.4. Calculemos la integral de trabajo del campo dado por

$$\vec{F} = (3x + 4y)\hat{i} + (2x + 3y^2)\hat{j},$$

a lo largo de la circunferencia C de radio 2 centrada en el origen y recorrida con orientación positiva (en el sentido anti-horario).

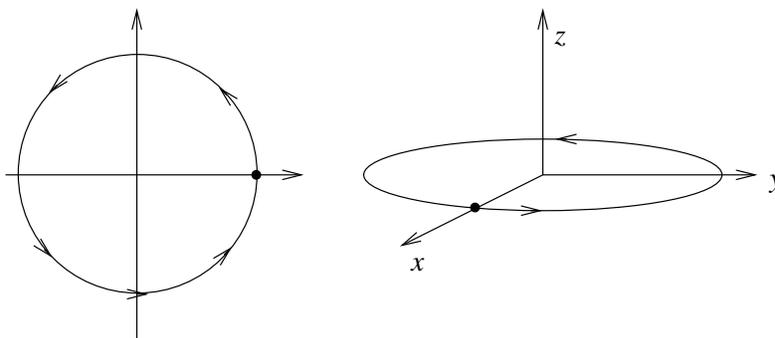


Figura 3.1: Círculo de radio 2 con orientación positiva (anti-horario)

Una parametrización posible es

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \hat{i} + 2 \sin t \hat{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Se obtiene que el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \oint_C (3x + 4y, 2x + 3y^2, 0) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (6 \cos t + 8 \sin t, 4 \cos t + 12 \sin^2 t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-16 \sin^2 t + 8 \cos^2 t] dt = -16\pi + 8\pi = -8\pi. \end{aligned}$$

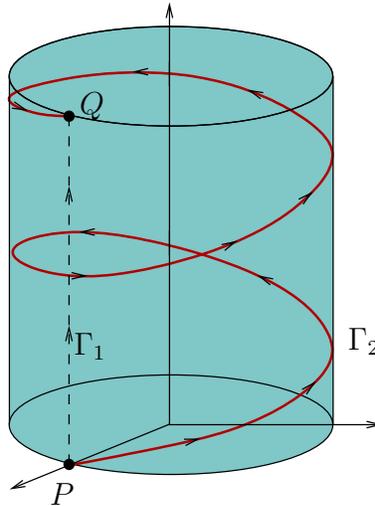
Ejemplo 3.1.5. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, -y, z).$$

Consideremos primero la misma curva C dada en el ejemplo anterior: la circunferencia de radio 2 centrada en el origen y recorrida en sentido positivo. El trabajo resulta ser:

$$\begin{aligned} W &= \oint_C (x, -y, z) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t, -2 \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -8 \operatorname{sen} t \cos t dt = 0. \end{aligned}$$

Consideremos ahora los dos caminos Γ_1 y Γ_2 que van desde $P = (1, 0, 0)$ hasta $Q = (1, 0, 4)$ tal como se ilustra en la siguiente figura :



Sus parametrizaciones están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \quad \vec{r}_1(t) &= P + t(Q - P) = (1, 0, 4t), \quad t \in [0, 1], \\ \Gamma_2 : \quad \vec{r}_2(t) &= (\cos(4\pi t), \operatorname{sen}(4\pi t), 4t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Los trabajos realizados son, respectivamente:

$$W_1 = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (1, 0, 4t) \cdot (0, 0, 4) dt = \int_0^1 16t dt = 8$$

y

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^1 (\cos(4\pi t), -\operatorname{sen}(4\pi t), 4t) \cdot (-4\pi \operatorname{sen}(4\pi t), 4\pi \cos(4\pi t), 4) dt \\ &= \int_0^1 (-8\pi \operatorname{sen}(4\pi t) \cos(4\pi t) + 16t) dt = \int_0^1 16t dt = 8. \end{aligned}$$

3.2. El teorema del rotor de Stokes

El teorema del rotor de Stokes relaciona la integral de línea o circulación de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, con la integral sobre una superficie S de la cual Γ es su borde geométrico. Aquí nos limitaremos a enunciar este teorema sin demostración. Un bosquejo de la demostración será

Teorema 3.2.1 (Stokes). *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto \mathcal{U} que incluye la superficie S y su borde ∂S . Sea finalmente $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal \hat{n} , es decir, respetando la regla de la mano derecha (ver figura 3.2). Entonces*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA.$$

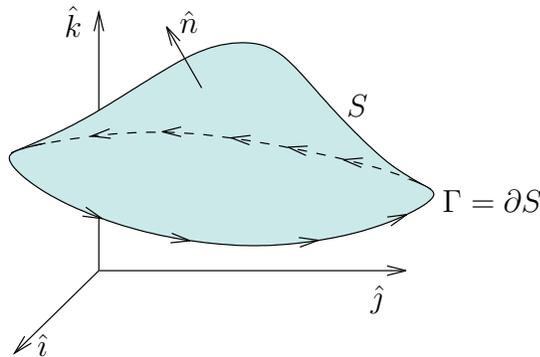


Figura 3.2: Configuración geométrica del teorema de Stokes

Ejemplo 3.2.2. Consideremos el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del ejemplo 3.1.4. Tenemos que

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x + 4y & 2x + 3y^2 & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}.$$

Sea S la superficie del círculo de radio 2 en el plano XY , centrado en el origen y orientado según la normal superior \hat{k} , cuyo borde geométrico ∂S es justamente la circunferencia C del ejemplo 3.1.4 orientada en sentido anti-horario. En virtud del teorema de Stokes tenemos que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S -2\hat{k} \cdot \hat{k} dA = -2 \text{Area}(\text{Círculo de radio 2}) = -8\pi,$$

que es exactamente el resultado que obtuvimos con el cálculo directo.

3.3. El teorema de Green en el plano

Se tiene el siguiente resultado para curvas y superficies en el plano XY .

Teorema 3.3.1 (Teorema de Green en el plano). *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido anti-horario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$, ambos de clase \mathcal{C}^1 en un abierto que contiene a S y ∂S . Entonces*

$$\oint_{\partial S} M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.2)$$

Este resultado es un caso específico del teorema de Stokes aplicado al campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y), N(x, y), 0).$$

En efecto, por una parte tenemos que

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x, y) & N(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Por otro lado, si suponemos que la superficie S esta contenida en el plano XY , la podemos orientar según la normal superior constante e igual a \hat{k} . Entonces la igualdad (3.2) se puede escribir como

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{k} dA,$$

que coincide con el teorema de Stokes.

Ejemplo 3.3.2. Aplicando el teorema de Green a $M = -y$ y $N = x$ se deduce que

$$A(S) = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} x dy - y dx,$$

donde $A(S)$ es el área de la región S contenida en el plano XY , y ∂S es el borde de S recorrido en sentido anti-horario. Esta fórmula nos permite calcular un área en términos de una integral de línea. Por ejemplo, consideremos la región $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$, cuyo borde es una elipse de semi-ejes dados por a y b . Podemos parametrizar la elipse usando $x(t) = a \cos t$ e $y(t) = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, y por lo tanto se obtiene

$$A(\text{Elipse}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t - (-ab \sin^2 t)) dt = \pi ab.$$

3.4. Campos conservativos

Notemos que en el ejemplo 3.1.5 donde $\vec{F}(x, y, z) = (x, -y, z)$, la integral de trabajo es igual a 0 sobre la primera curva C que es cerrada, mientras que para las curvas Γ_1 y Γ_2 que unen ambas a P con Q , el valor de las respectivas integrales de trabajo es el mismo. Esto no es una coincidencia sino que se debe a que en este caso $\vec{F} = -\nabla g$, donde $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $g(x, y, z) = (-x^2 + y^2 - z^2)/2$. En efecto, si Γ es una curva regular parametrizada por $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= - \int_a^b \nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt}[g(\vec{r}(t))] dt = g(\vec{r}(a)) - g(\vec{r}(b)). \end{aligned}$$

Esta última cantidad depende solamente de la diferencia de valores de g en los puntos extremos de la curva Γ y no de la forma específica que ésta tenga. En particular, si Γ es cerrada, entonces $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ y el trabajo realizado es 0.

En general, se dice que un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es *conservativo* en Ω si deriva de un potencial $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en el sentido que $\vec{F} = -\nabla g$ sobre Ω . Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.4.1. *Sea $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ un campo vectorial continuo sobre un abierto conexo Ω de \mathbb{R}^3 . Entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

- (i) *El campo \vec{F} es conservativo en Ω .*
- (ii) *Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene*

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

- (iii) *Para cualquier par de curvas regulares, $\Gamma_1 \subset \Omega$ y $\Gamma_2 \subset \Omega$, con iguales puntos inicial y final, se tiene*

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Demostración. Probaremos la secuencia de implicancias (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).

- **(i) \Rightarrow (ii):** Por el mismo cálculo del ejemplo anterior, para cualquier campo conservativo en Ω el valor de la integral de trabajo a lo largo de una curva $\Gamma \subset \Omega$ está dado por la *diferencia de potencial* entre los extremos de la curva. Si en particular la curva es cerrada, entonces la integral de trabajo resulta ser 0.
- **(ii) \Rightarrow (iii):** Basta considerar la curva cerrada $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ y descomponer el trabajo total sobre Γ como la suma de los trabajos sobre cada segmento.

- (iii) \Rightarrow (i): Comenzamos por escoger arbitrariamente un punto $\vec{p}_0 \in \Omega$ al cual le asignaremos el valor de potencial cero (notemos que el potencial no es único, basta con sumarle una constante para obtener otro potencial). Luego, dado cualquier punto $\vec{p} \in \Omega$ definimos

$$g(\vec{p}) := - \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}}$ representa la integral de trabajo sobre cualquier curva $\Gamma \subset \Omega$ regular por pedazos cuyo origen es el punto \vec{p}_0 y cuyo punto final es \vec{p} .

La conexidad de Ω asegura la existencia de Γ . Por otra parte, en virtud de (iii) sabemos que el valor de la integral de trabajo no depende de la forma específica de Γ , por lo que la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida.

Sólo queda probar que efectivamente g es diferenciable y que $\nabla g = -\vec{F}$. En virtud de la continuidad de \vec{F} , basta probar que para todo $\vec{p} \in \Omega$ y $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(\vec{p} + \lambda \vec{h}) - g(\vec{p})}{\lambda} = -\vec{F}(\vec{p}) \cdot \vec{h}. \quad (3.3)$$

Fijemos $\vec{p} \in \Omega$ y $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$ y tomemos λ suficientemente pequeño de modo que el segmento de recta $[\vec{p}, \vec{p} + \lambda \vec{h}]$ esté contenido en Ω . Por definición de g podemos escribir

$$g(\vec{p} + \lambda \vec{h}) - g(\vec{p}) = \int_{[\vec{p}, \vec{p} + \lambda \vec{h}]} (-\vec{F}) \cdot d\vec{r} = -\lambda \int_0^1 \vec{F}(\vec{p} + t\lambda \vec{h}) \cdot \vec{h} dt,$$

de donde se deduce fácilmente que (3.3) se cumple. ■

Supongamos ahora que el campo vectorial \vec{F} es de clase \mathcal{C}^1 en Ω . Si es conservativo, entonces el potencial correspondiente $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase \mathcal{C}^2 y en consecuencia se debe tener que

$$\text{rot } \vec{F} = -\text{rot } \nabla g \equiv \vec{0} \quad \text{en } \Omega \quad (3.4)$$

Para los detalles ver la observación 1.2.7. Es decir, para un abierto conexo general Ω , el que un campo vectorial \vec{F} de clase \mathcal{C}^1 sea irrotacional es una *condición necesaria* para que sea conservativo en Ω .

Ejemplo 3.4.2. Consideremos nuevamente el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del ejemplo 3.1.4. Como vimos en el ejemplo 3.2.2, $\text{rot } \vec{F} = -2\hat{k}$ y en consecuencia el campo no es conservativo en \mathbb{R}^3 . Esto es consistente con los cálculos hechos en los ejemplos 3.1.4 y 3.2.2 donde se obtuvo un valor no nulo para la integral de trabajo sobre un camino cerrado.

En virtud del teorema de Stokes en conjunto con la proposición 3.4.1, es natural considerar (3.4) como una condición además suficiente para que un campo vectorial sea conservativo. Sin embargo, esto presupone que es posible aplicar el teorema de Stokes, para lo cual es necesario imponer condiciones adicionales sobre el dominio Ω tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4.3. (Un campo irrotacional que no es conservativo). Consideremos el campo vectorial

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j}$$

que es de clase C^∞ en el abierto conexo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$. Es directo verificar que \vec{F} satisface (3.4), esto es, \vec{F} es irrotacional en todo $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$. En efecto, por definición del rotor en este caso tenemos que

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) \hat{k},$$

pero

$$\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

mientras que

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

¿Podemos concluir que \vec{F} es conservativo en todo $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$? La respuesta es negativa. De hecho, si consideramos la circunferencia $C(a)$ de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en sentido anti-horario, entonces

$$\begin{aligned} \oint_{C(a)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} [F_1(\vec{r}(\theta))\dot{r}_1(\theta) + F_2(\vec{r}(\theta))\dot{r}_2(\theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a \sen \theta}{a^2} (-a \sen \theta) + \frac{a \cos \theta}{a^2} (a \cos \theta) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \end{aligned}$$

lo muestra que al menos para ese tipo de caminos cerrados la integral de trabajo no es cero.

En el ejemplo anterior, si Γ es una curva cerrada y regular contenida en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$ tal que es posible encontrar una superficie orientable S que esté completamente contenida en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$ y tal que $\partial S = \Gamma$, entonces sí es posible aplicar el teorema de Stokes para concluir que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A} = 0.$$

El problema con la circunferencia $C(a)$ es que cualquier superficie regular por trozos S que la *interpole* en el sentido que $\partial S = C(a)$, necesariamente pasa por el Eje Z , y en consecuencia no se cumple la hipótesis del teorema de Stokes sobre que la superficie tiene que estar completamente contenida en el dominio de diferenciabilidad del campo. Esto ocurre por el tipo de dominio que estamos considerando en este caso: $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$.

Por lo tanto, la conclusión es que si el dominio Ω en cuestión es tal que “siempre se puede aplicar el teorema de Stokes”, entonces la condición (3.4) es también suficiente para concluir que el campo es conservativo en dicho dominio. El dominio más simple donde esto se asegura es precisamente el espacio completo, es decir, apelando al teorema de Stokes se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.4.4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 . Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \mathbb{R}^3.$$

Sin embargo, hay otros dominios que también permiten concluir una caracterización similar. Un dominio Ω se dice *estrellado* si existe $\vec{r}_0 \in \Omega$ tal que para todo $\vec{r} \in \Omega$ el segmento $[\vec{r}_0, \vec{r}]$ está contenido en Ω . Un dominio Ω se dice *convexo* si para todo par de puntos $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \Omega$ el segmento $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ está contenido en Ω . Se tiene que:

- Todo dominio convexo es estrellado.
- $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$ no es estrellado.

Intuitivamente, un dominio estrellado no tiene agujeros por lo que dada una curva cerrada y regular por trozos en un dominio estrellado, siempre es posible encontrar una superficie orientable regular por trozos que la interpola y que está completamente contenida por el dominio, de modo que se cumple el siguiente resultado que generaliza al anterior:

Proposición 3.4.5. Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 . Supongamos que Ω es estrellado. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \Omega.$$

Existen además otros dominios que, sin ser estrellados, sí permiten interpolar una superficie dada cualquier curva cerrada contenida en ellos. Un ejemplo es $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, para el cual se cumple que si Γ es una curva simple, regular por trozos y cerrada Γ que no pase por el origen, siempre es posible construir una superficie regular por trozos y orientable $S \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $\partial S = \Gamma$, por lo que también se tiene lo siguiente:

Proposición 3.4.6. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 . Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

Ejemplo 3.4.7. Consideremos un campo central expresado en coordenadas esféricas $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r)\hat{r}$, $r > 0$, para alguna función $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Usando la expresión del rotor en estas coordenadas (ver la sección 1.3.4 y también el ejercicio 1.4.7) se verifica directamente que $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. En virtud del último resultado, concluimos que \vec{F} es conservativo en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Esto se puede verificar directamente en este caso usando la expresión del gradiente en coordenadas esféricas (1.10), de donde se concluye fácilmente que

$$g(r) = - \int \phi(r) dr + C, \quad r > 0,$$

proporciona un potencial para \vec{F} en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, donde $\int \phi(r) dr$ es una primitiva de ϕ y C es una constante arbitraria.

3.5. Ejercicios

1. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$. Calcular la integral de trabajo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde Γ es la *lenteja* formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$; $x, y \geq 0$ recorrida en sentido anti-horario.
2. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria Γ sobre el manto del paraboloido invertido de ecuación $x^2 + y^2 = -z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = -e^{-2\theta}$, $\theta \geq 0$. Considere el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} + x \operatorname{sen}(x^2), \frac{-2xy}{x^2 + y^2} - y^2 \cos(y^3), e^z \right)$$

Calcule el trabajo del campo a lo largo de Γ .

Indicación: $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos^3(x) dx = \frac{2}{5}$.

3. Una partícula se desplaza sobre la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio a describiendo una trayectoria helicoidal caracterizada por las ecuaciones $r = a$ y $\varphi = \theta/2$ (coordenadas esféricas) con θ variando desde 0 hasta 2π . Bosqueje esta trayectoria y calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = -y\hat{i} + x\hat{j}$.
4. Considere el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{j} + z\hat{k}$$

y las curvas con sus respectivas parametrizaciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 : \vec{\Gamma}_1(t) &= (a \cos(t), a \sin(t), 0), & t \in [\pi, 2\pi] \\ \mathfrak{C}_2 : \vec{\Gamma}_2(t) &= (1-t)(a, 0, 0) + t(a, 0, a), & t \in [0, 1] \\ \mathfrak{C}_3 : \vec{\Gamma}_3(t) &= (a \cos(t), a \sin(t), a), & t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Bosqueje $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3$ y calcule $\int_{\mathfrak{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

5. Calcule la integral de trabajo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial

$$\vec{F} = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$$

sobre la hélice Γ que une los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (1, 0, 1)$ dando una sola vuelta.

6. Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase \mathcal{C}^2 . Sea Σ una superficie regular a trozos y orientable con borde geométrico dado por $C = \partial\Sigma$, ambos orientados consistentemente. Muestre que

$$\iint_{\Sigma} \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{A} = \int_C \phi \nabla\psi \cdot d\vec{r}.$$

7. Dados dos campos escalares $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 , pruebe que para toda curva simple cerrada y regular por pedazos Γ se tiene

$$\oint_{\Gamma} f \nabla g \cdot d\vec{r} + \oint_{\Gamma} g \nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$$

8. Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ orientado según la normal superior. Considere el campo definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (z \sin(x) - y^3, z \cos(y) + x^3, \cos(xy)).$$

Calcule $\iint_S \nabla \times \vec{F} \, d\vec{A}$.

9. Utilice el teorema de Green en el plano para calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$. Ind.: considere la curva plana parametrizada por $x = 8 \cos^3 \theta$ y $y = 8 \sin^3 \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
10. Utilice el teorema de Stokes para calcular la integral de trabajo del campo $\vec{G} = (x - y)\hat{i} + x^2y\hat{j} + zx\hat{k}$ a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 1$ orientado en sentido antihorario.
11. Sea Γ la curva definida por la intersección del plano $x + z = 2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + z)$. Bosqueje la curva Γ . Escoja una orientación para Γ y utilice el teorema de Stokes para calcular la integral de trabajo $\oint_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{G}(x, y, z) = (z, 2x, y)$.
12. Use el Teorema de Stokes para calcular $\oint_C [y^2\hat{i} + z^2\hat{j} + x^2\hat{k}] \cdot d\vec{r}$ donde C es el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ recorridos en dicho orden.
13. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z^2(x^2 + y^2) = y^2$, $x, y, z \geq 0$. Calcule el trabajo de $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{xy}{x^2+y^2}\hat{j} + e^z\hat{k}$.
14. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 18abxyz^2)$. Pruebe que es conservativo y determine el potencial asociado.
15. Pruebe que el campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\hat{i} + (x - y)\hat{j}$ es conservativo. Calcule el trabajo de \vec{F} sobre la hélice $\vec{\varphi}(\theta) = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} + \theta \hat{k}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
16. Considere la región del plano $R = [0, \pi]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Se define para $n > 2$ las siguientes funciones

$$\begin{aligned} M_n(x, y) &= xy^{n-1} \cos^n(y) + \ln(1 + x^n) \\ N_n(x, y) &= yx^{n-1} \sin^n(x) + ye^{y^n} \end{aligned}$$

(a) Calcule $I_n = \int_{\partial R} M_n(x, y) dx + N_n(x, y) dy$.

(b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1}$

3.6. Problemas

Problema 3.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío, $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, ambos de clase C^1 . Pruebe que si $S \cup \partial S \subset \Omega$, donde S es una superficie regular a pedazos, entonces se tiene la fórmula de integración por partes

$$\iint_S g \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial S} g \vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{A},$$

siempre que las orientaciones de S y ∂S sean las adecuadas (explique). ¿Qué puede decir cuando además se tiene que \vec{F} es conservativo en Ω ?

Problema 3.2. Considere la curva Γ sobre el plano XY descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1 - \cos(\theta)) \quad a > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

- Encuentre una parametrización para Γ y bosqueje esta curva.
- Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F} = \left(2xy^2 \cos(x^2y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, 2x^2y \cos(x^2y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

al dar una vuelta completa a lo largo de la curva Γ en el sentido anti-horario.

Problema 3.3. Dado $h > 0$, sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2},$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= z \\ z(0) &= h \end{aligned}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

- Bosqueje la curva.
- Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2} \right).$$

Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$. Calcule el trabajo realizado por el campo \vec{F} al desplazar una partícula a través de Γ_0 .

Problema 3.4. ¹

- (a) Bosqueje la superficie definida por $z^2 + x^2 = 4 + y^2$, $y \geq 0$. Note que para y fijo, la ecuación anterior representa una circunferencia.
- (b) Bosqueje la curva \mathcal{C} obtenida al intersectar la superficie anterior con el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.
- (c) Calcule la circulación $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo (en coordenadas cilíndricas)

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho \sin \theta + z) \hat{\rho} + \frac{z}{\rho} \sin \theta \hat{\theta} + (z^3 - \rho \cos \theta) \hat{k}.$$

Problema 3.5. ² Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

- (a) Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = (x^2 + z) \hat{i} + (y^2 + x) \hat{j} + (z^2 + y) \hat{k}$ a lo largo de Γ .
- (b) Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\theta} + z \hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el teorema de Stokes.

Problema 3.6. ³ Considere el campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x^2 - y}{(x^2 + y^2)} \hat{i} + \frac{x}{(x^2 + y^2) - 2y} \hat{j}$.

- (a) Indique el dominio de definición de \vec{F} y pruebe que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en dicho dominio.
- (b) Calcule la integral de trabajo $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ recorrida en sentido antihorario. ¿Contradice esto el teorema de Stokes? Explique.
- (c) Calcule el trabajo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de cualquier curva simple regular \mathcal{C} contenida en el plano $z = 0$ y que no pasa por el origen. Distinga según si la curva encierra o no el origen.

¹Control 2. Primavera 1996. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

²Control 2. Primavera 1997. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

³Control 2. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas.

Capítulo 4

Complementos sobre divergencia y teorema de Gauss

4.1. Caracterización límite de la divergencia

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 donde Ω es un abierto no vacío. Consideremos un punto arbitrario $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Sea $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \Omega$ una familia de abiertos acotados contenidos en Ω cuyas fronteras $\{\partial\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ son superficies regulares por pedazos y orientadas según la normal exterior, y tales que se satisface lo siguiente:

- (i) $\forall \varepsilon > 0, \vec{r}_0 \in \overline{\Omega_\varepsilon}$.
- (ii) $\text{diam}(\Omega_\varepsilon) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in \Omega_\varepsilon\} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A modo de ejemplo podemos tomar el cubo

$$\Omega_\varepsilon = (x_0, x_0 + \varepsilon) \times (y_0, y_0 + \varepsilon) \times (z_0, z_0 + \varepsilon),$$

cuyo diámetro es $\varepsilon\sqrt{3}$ y que está contenido en Ω , al menos para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En el caso general, notemos que como consecuencia de (ii), $\text{Vol}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Además, si para cada $\varepsilon > 0$ escogemos $\vec{r}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$, por (i) combinado con (ii) deducimos que $\vec{r}_\varepsilon \rightarrow \vec{r}_0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

En virtud primero del teorema de la divergencia de Gauss, y en segundo término del teorema del valor medio para integrales múltiples, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$:

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega_\varepsilon} \text{div}(\vec{F}) dV = \text{div}(\vec{F})(\vec{r}_\varepsilon) \text{Vol}(\Omega_\varepsilon), \quad (4.1)$$

para algún $\vec{r}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$. Como \vec{F} es de clase \mathcal{C}^1 , tenemos que $\text{div}(\vec{F}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo y por lo tanto $\text{div}(\vec{F})(\vec{r}_\varepsilon) \rightarrow \text{div}(\vec{F})(\vec{r}_0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. De esta forma, a partir de (4.1) podemos inferir lo siguiente:

$$\text{div}(\vec{F})(\vec{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{flujo de } \vec{F} \text{ que sale de } \Omega_\varepsilon}{\text{volumen de } \Omega_\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Observación 4.1.1. La expresión (4.2) proporciona una caracterización del valor que toma $\operatorname{div}(\vec{F})(\vec{r}_0)$ que no hace referencia explícita a ningún sistema de coordenadas en particular, sino que sólo depende del comportamiento límite del cociente entre el flujo que sale a través de $\partial\Omega_\varepsilon$ y el volumen del abierto Ω_ε .

4.2. Fórmulas integrales de Green

Las siguientes fórmulas son del tipo *integración por partes* y resultan como consecuencias directas del teorema de la divergencia de Gauss.

Proposición 4.2.1 (Primera fórmula integral de Green). Sean f y g dos campos escalares de clase \mathcal{C}^1 y \mathcal{C}^2 , respectivamente, en un abierto no vacío $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$. Consideremos un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ cuya superficie $\partial\Omega$ es cerrada, regular por pedazos y orientada según la normal exterior \hat{n} . Supongamos que $\bar{\Omega} \subset \mathcal{U}$. Entonces

$$\iiint_{\Omega} f \Delta g \, dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} \, dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV, \quad (4.3)$$

donde $\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \hat{n}$ denota la derivada normal de g .

Demostración. Consideremos el campo vectorial definido por $\vec{F} = f \nabla g$, que por hipótesis resulta ser de clase \mathcal{C}^1 en \mathcal{U} . Notemos que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(f \nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Además, se tiene

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = f \frac{\partial g}{\partial n}$$

Entonces la igualdad (4.3) se deduce de aplicar el teorema de la divergencia al campo \vec{F} . ■

Un corolario inmediato de la proposición anterior que tiene una expresión más simétrica en cuanto a los roles de f y g es el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2 (Segunda fórmula integral de Green). Sean f y g dos funciones escalares de clase \mathcal{C}^2 en un abierto no vacío $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$. Consideremos un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ cuya superficie $\partial\Omega$ es cerrada, regular por pedazos y orientada según la normal exterior \hat{n} . Entonces

$$\iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dV = \iint_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \, dA. \quad (4.4)$$

Demostración. La igualdad (4.4) se deduce directamente al aplicar dos veces la proposición anterior a f y g , pero con la salvedad que la segunda vez se intercambian los roles de cada función para luego restar a (4.3) la ecuación correspondiente donde los roles de f y g fueron intercambiados. ■

4.3. Divergencia en coordenadas ortogonales

En esta sección veremos cómo obtener la fórmula (1.11) para la divergencia en coordenadas ortogonales, a partir de escoger apropiadamente la familia de abiertos $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \Omega$ en (4.2).

Sea $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas ortogonales. Consideremos el vector $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0, w_0)$ y para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño definamos el abierto

$$\Omega_\varepsilon = \{\vec{r}(u, v, w) \mid u_0 < u < u_0 + \varepsilon, v_0 < v < v_0 + \varepsilon, w_0 < w < w_0 + \varepsilon\}. \quad (4.5)$$

Es fácil ver que esta elección para la familia de abiertos $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisface las condiciones establecidas en la sección 4.1 y que aseguran la validez de (4.2).

Sea también $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase \mathcal{C}^1 en el abierto Ω con $\vec{r}_0 \in \Omega$. Definamos

$$\begin{aligned} F_u &= F_u(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{u}(u, v, w), \\ F_v &= F_v(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{v}(u, v, w), \\ F_w &= F_w(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{w}(u, v, w). \end{aligned}$$

De este modo, podemos escribir

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) = F_u(u, v, w)\hat{u}(u, v, w) + F_v(u, v, w)\hat{v}(u, v, w) + F_w(u, v, w)\hat{w}(u, v, w),$$

o más simplemente

$$\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w},$$

donde hemos omitido las dependencias explícitas en (u, v, w) para simplificar la notación.

Notemos que podemos descomponer la superficie $\partial\Omega_\varepsilon$ en la unión de 6 superficies regulares, cada una correspondiente a la imagen vía el cambio de coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ de una cara del cubo $[u_0, u_0 + \varepsilon] \times [v_0, v_0 + \varepsilon] \times [w_0, w_0 + \varepsilon]$ perteneciente al espacio donde se mueven las coordenadas (u, v, w) .

Por ejemplo, si llamamos S_ε^1 a la imagen vía \vec{r} de la cara correspondiente a $u = u_0 + \varepsilon$, entonces S_ε^1 es la superficie parametrizada por

$$\vec{\varphi}(v, w) = \vec{r}(u_0 + \varepsilon, v, w), \quad (v, w) \in [y_0, y_0 + \varepsilon] \times [z_0, z_0 + \varepsilon],$$

en cuyo caso es fácil ver que la normal exterior a la región Ω_ε está dada por

$$\hat{n} = \hat{u}(u_0 + \varepsilon, v, w),$$

mientras que el diferencial de área correspondiente (ver el apéndice B) es

$$dA = (h_v h_w)(u_0 + \varepsilon, v, w).$$

Aquí

$$h_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \quad \text{y} \quad h_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

son los factores escalares asociados a cada componente del sistema de coordenadas \vec{r} .

De esta forma, tenemos que para esa superficie el flujo según la normal exterior se puede expresar como

$$\iint_{S_\varepsilon^1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} (F_u h_v h_w)(u_0 + \varepsilon, v, w) dw dv$$

Procediendo de manera análoga con las otras 5 superficies y conservando siempre la orientación dada por la normal exterior al abierto en cada caso, se deduce que:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} [F_w h_u h_v(u, v, w_0 + \varepsilon) - F_w h_u h_v(u, v, w_0)] dv du \\ &+ \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} [F_v h_u h_w(u, v_0 + \varepsilon, w) - F_v h_u h_w(u, v_0, w)] dw du \\ &+ \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} [F_u h_v h_w(u_0 + \varepsilon, v, w) - F_u h_v h_w(u_0, v, w)] dw dv \\ &= \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} \frac{[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)]}{h_u h_v h_w} h_u h_v h_w dw dv du, \end{aligned}$$

Denotando

$$\Gamma(u, v, w) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)}{h_u h_v h_w},$$

y usando la expresión del diferencial de volumen (ver el apéndice C)

$$dV = h_u h_v h_w dw dv du$$

junto con el teorema del valor medio para integrales múltiples, se obtiene

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \Gamma(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon) \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} dV = \Gamma(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon) \text{Vol}(\Omega_\varepsilon),$$

para ciertos $u_\varepsilon \in [u_0, u_0 + \varepsilon]$, $v_\varepsilon \in [v_0, v_0 + \varepsilon]$, y $w_\varepsilon \in [w_0, w_0 + \varepsilon]$. Esta última igualdad junto con (4.2) implica que

$$\text{div}(\vec{F})(\vec{r}_0) = \Gamma(u_0, v_0, w_0),$$

es decir,

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w) \right]$$

que es exactamente (1.11).

4.4. **Demostración del teorema de Gauss

El objetivo de esta sección es proporcionar una demostración completa del teorema de la divergencia de Gauss. Comenzaremos por probar algunas afirmaciones. La primera es que el operador de divergencia es invariante bajo rotaciones de los ejes. Para hacer precisa esta afirmación escribamos

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum_{i=1}^3 F_i e_i$$

donde e_1, e_2, e_3 forman la base canónica de \mathbb{R}^3 . Consideremos una base ortonormal v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}^3 . Entonces $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i v_i$ donde $\tilde{F}_i = \langle \vec{F}, v_i \rangle$. Introduzcamos el cambio de variables $x = Ry$ donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad R = [v_1, v_2, v_3] \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

es decir, R es la matriz de 3×3 cuyas columnas son los vectores v_1, v_2, v_3 . Notemos que al ser estos vectores ortonormales se tiene

$$R^T R = I = R R^T.$$

Entonces en las variables y y usando la base v_1, v_2, v_3 el campo se puede expresar como

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i(y) v_i \quad \tilde{F}_i(y) = \langle \vec{F}(Ry), v_i \rangle$$

Lema 4.4.1. *Con la notación anterior se tiene*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i}$$

Demostración. Utilizando la definición de \tilde{F}_i y la regla de la cadena tenemos

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}(Ry), v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, v_i \right\rangle$$

Pero la relación $x = Ry$ se puede escribir componente por componente $x_j = \sum_{i=1}^3 R_{ji} y_i$ lo que nos da $\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = R_{ji}$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j} R_{ji}, v_i \right\rangle$$

Por otro lado, los vectores v_i pueden expresarse en términos de R y la base canónica $v_i = \sum_{k=1}^3 R_{ki} e_k$ por lo que

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ji} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 R_{ji} R_{ki} \right) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \right\rangle$$

Pero al ser R una matriz ortonormal, es decir, $R^T R = R R^T = I$ tenemos

$$\sum_{i=1}^3 R_{ji} R_{ki} = \text{componente } jk \text{ del producto } R R^T = \delta_{jk}$$

donde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$

■

El segundo paso para probar el teorema de la divergencia consiste en obtener una versión local de este, es decir, una versión del teorema donde además se supone que el campo \vec{F} es cero fuera de una bola suficientemente pequeña.

Lema 4.4.2. (*Versión local del teorema de la divergencia*) Para cualquier $x_0 \in \overline{\Omega}$ existe un $R > 0$ (pequeño, que depende de x_0) tal que si \vec{F} es un campo \mathcal{C}^1 que se anula fuera de $B_R(x_0)$ entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV. \quad (4.6)$$

Demostración.

El caso $x_0 \in \partial\Omega$. Gracias al Lema 4.4.1 vemos que la fórmula (4.6) es invariante bajo rotación de los ejes. Efectuando una rotación conveniente podemos suponer entonces que $\hat{n}(x_0) = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Usando la definición de superficie regular y el teorema de la función inversa podemos afirmar que existe $R > 0$ tal que la superficie $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ es el grafo de funciones \mathcal{C}^1 $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq 3$ es decir

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap B_R(x_0) &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \varphi_1(x_2, x_3), (x_2, x_3) \in U_1\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = \varphi_2(x_1, x_3), (x_1, x_3) \in U_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = \varphi_3(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in U_3\} \end{aligned}$$

donde U_1, U_2, U_3 son abiertos de \mathbb{R}^2 . Escribamos

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_{\Omega \cap B_R(x_0)} \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_{\Omega \cap B_R(x_0)} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right] dV$$

y analicemos el último término. Vemos que se puede elegir $0 < r < R$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$ entonces

$$\iiint_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dV = \iint_{U_3} \int_{\bar{x}_3}^{\varphi_3(x_1, x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2$$

para algún \bar{x}_3 que depende de x_0 . Luego

$$\iiint_{\Omega \cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dV = \iint_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) dx_1 dx_2.$$

Como $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ se puede parametrizar por $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2))$ tenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} = \left[-\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, 1 \right]$$

Luego, si \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$

$$\iint_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} dS = \iint_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) dx_1 dx_2$$

y deducimos que

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dV = \iint_{\partial\Omega} (0, 0, F_3) \cdot \hat{n} dS.$$

Similarmente, utilizando la parametrización $\vec{r}(x_1, x_3) = (x_1, \varphi_2(x_1, x_3), x_3)$ se encuentra

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dV = \iint_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

y análogamente

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dV = \iint_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{n} dS.$$

Sumando las fórmulas anteriores deducimos la validez de (4.6) en el caso que $x_0 \in \partial\Omega$ y \vec{F} se anula fuera de $B_r(x_0)$.

El caso $x_0 \in \Omega$. En este caso basta encontrar un cubo Q de centro x_0 contenido en Ω y luego elegir $R > 0$ pequeño tal que $B_R(x_0) \subseteq Q$.

Podemos aplicar entonces el cálculo en el caso de un cubo y obtener

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{F} = \iint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Notando que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = 0$$

obtenemos (4.6) en este caso. ■

Veamos ahora cómo se deduce la versión general del teorema de la divergencia.

Demostración (caso general). Tenemos que para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe un $R_x > 0$ tal que si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_x}(x)$ entonces vale la fórmula del teorema de la divergencia.

Usando la compacidad de $\overline{\Omega}$ (cerrado y acotado) podemos encontrar una familia *finita* de puntos x_i , $1 \leq i \leq m$ con sus respectivos $R_i = R_{x_i} > 0$ tales que

- $\overline{\Omega}$ se puede cubrir por la unión $\cup_{i=1}^m B_{R_i}(x_i)$,
- y para cualquier bola $B_{R_i}(x_i)$, si \vec{F} se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ entonces vale el teorema.

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase \mathcal{C}^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.

Para $x \in \overline{\Omega}$ definamos

$$\eta_i(x) = \frac{\tilde{\eta}_i(x)}{\sum_{j=1}^m \tilde{\eta}_j(x)}$$

Entonces

- η_i es \mathcal{C}^1 en una vecindad de $\overline{\Omega}$
- η_i se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$
- para cualquier $x \in \overline{\Omega}$: $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$.

Consideremos un campo \vec{F} de clase \mathcal{C}^1 . Como $\sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1$ podemos descomponer \vec{F} de la forma

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^m (\eta_i \vec{F}).$$

Cada función $\eta_i \vec{F}$ es un campo \mathcal{C}^1 que se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ por lo que podemos aplicar la versión local del teorema de la divergencia

$$\iint_{\partial\Omega} \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\eta_i \vec{F}) dV$$

Sumando

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^m \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^m \operatorname{div}(\eta_i \vec{F}) dV \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^m \eta_i \vec{F} \right] dV = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Complementos sobre rotor y teorema de Stokes

5.1. Caracterización límite del rotor

Dado un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase \mathcal{C}^1 sobre el abierto no vacío Ω y un punto arbitrario $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, consideramos una familia $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \Omega$ que satisface las mismas condiciones que las usadas en la sección 4.1 para la caracterización límite de la divergencia. Es posible probar entonces que

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \hat{n} \times \vec{F} \, dA, \quad (5.1)$$

donde \hat{n} es la normal exterior a cada superficie $\partial\Omega_\varepsilon$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$\vec{v} \cdot \left(\frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} (\hat{n} \times \vec{F}) \, dA \right) = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{v} \cdot (\hat{n} \times \vec{F}) \, dA = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} (\vec{F} \times \vec{v}) \cdot \hat{n} \, dA.$$

En virtud de 4.2, deducimos que la expresión del lado derecho converge a $\text{div}(\vec{F} \times \vec{v})$, es decir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{v} \cdot \left(\frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} (\hat{n} \times \vec{F}) \, dA \right) = \text{div}(\vec{F} \times \vec{v}). \quad (5.2)$$

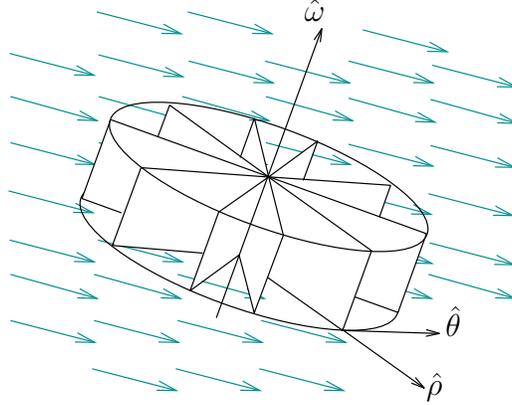
Dado que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es arbitrario, esta última fórmula implica que el límite existe y más aún, al reemplazar $\vec{v} = \hat{i}$, $\vec{v} = \hat{j}$ y $\vec{v} = \hat{k}$, nos permite obtener la expresión:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \hat{n} \times \vec{F} \, dA = \text{div}(\vec{F} \times \hat{i}) \hat{i} + \text{div}(\vec{F} \times \hat{j}) \hat{j} + \text{div}(\vec{F} \times \hat{k}) \hat{k} = \text{rot } \vec{F}.$$

Para la última igualdad usamos una identidad que es fácil de verificar (ver el ejercicio 1.4.5).

5.2. Interpretación física del rotor

La interpretación física que se le da al rotor asociado a un campo \vec{F} es la proporcionar, salvo una constante, la *velocidad angular* local de éste, la cual se produce cuando el fluido en el punto estudiado “rota” sobre sí mismo. Para ver esto, consideremos una rueda de altura h y aspas de radio ρ , y cuyo centro esta ubicado en el punto (x, y, z) . Esta se sumerge en un fluido de campo de velocidades dado por \vec{F} como muestra la figura:



La velocidad tangencial de los puntos ubicados en el borde de la rueda es $\vec{F} \cdot \hat{\theta}$, de modo que la rapidez angular media \bar{w} se puede estimar de la siguiente manera

$$\rho \bar{w} = \bar{v}_T = \frac{1}{2\pi h} \int_0^h \int_0^{2\pi} (\vec{F} \cdot \hat{\theta}) d\theta dz = \frac{1}{2\pi \rho h} \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{\theta}) dA,$$

donde S denota el borde de la rueda (o manto del cilindro que ésta forma) y \bar{v}_T denota la rapidez tangencial media. Usando propiedades del producto cruz y el hecho que $\hat{\theta} = \hat{w} \times \hat{\rho}$ se obtiene que $\vec{F} \cdot \hat{\theta} = \vec{F} \cdot (\hat{w} \times \hat{\rho}) = \hat{w} \cdot (\hat{\rho} \times \vec{F})$, lo que implica

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi \rho^2 h} \hat{w} \cdot \iint_S (\hat{\rho} \times \vec{F}) dA = \frac{1}{2\pi \rho^2 h} \hat{w} \cdot \iint_S (\hat{n} \times \vec{F}) dA,$$

ya que la normal exterior a la superficie S es precisamente $\hat{n} = \hat{\rho}$. Ahora, la normal exterior a las tapas del cilindro que forma la rueda es un factor de \hat{w} , el producto entre \hat{w} y la integral de sobre las tapas se anula. De esta forma obtenemos

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi \rho^2 h} \hat{w} \cdot \iint_{C_{h,\rho}} (\hat{n} \times \vec{F}) dA = \frac{1}{2} \hat{w} \cdot \left(\frac{1}{\text{Vol}(C_{h,\rho})} \iint_{C_{h,\rho}} (\hat{n} \times \vec{F}) dA \right),$$

donde $C_{h,\rho}$ denota el cilindro de radio ρ y altura h formado por la rueda. Haciendo tender h y ρ a cero, se obtiene por (5.1) que

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2} \hat{w} \cdot \text{rot}(\vec{F})(x, y, z). \quad (5.3)$$

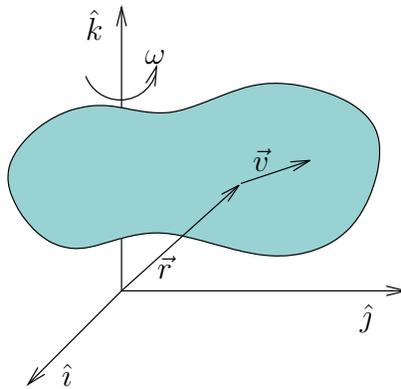
Es decir, el rotor $\text{rot}(\vec{F})$ coincide con la velocidad angular del flujo \vec{F} en el punto (x, y, z) , salvo por el factor $\frac{1}{2}$, tal como lo habíamos anunciado.

Ejemplo 5.2.1. Un cuerpo sólido gira en torno al eje \hat{k} con velocidad angular constante igual a $\omega\hat{k}$. Sabemos que la velocidad de un punto en la posición \vec{r} es

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r},$$

vale decir, el campo de velocidades está dado por

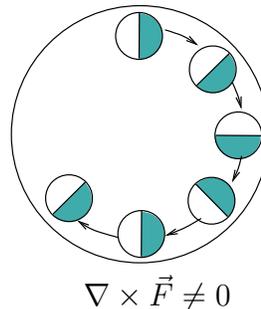
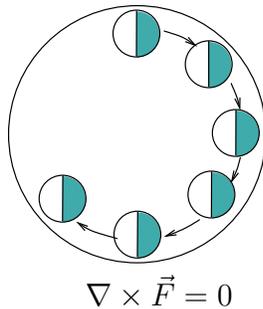
$$\vec{v}(x, y, z) = \omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = -\omega y\hat{i} + \omega x\hat{j}$$



Usando la definición diferencial del rotor se obtiene:

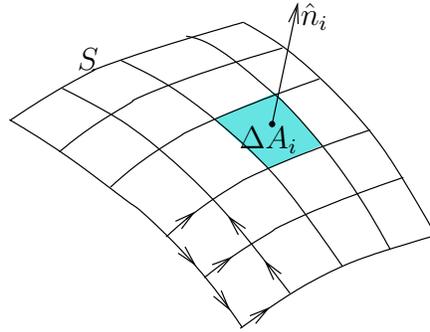
$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (-\omega y\hat{i} + \omega x\hat{j}) = 2\omega\hat{k} = 2\vec{\omega}.$$

Observación 5.2.2. Si \vec{F} representa el campo de velocidades de un fluido, la condición $\text{rot } \vec{F} = 0$ significa que el fluido no rota sobre si mismo, es decir, una pequeña rueda sumergida en el flujo puede desplazarse en una trayectoria curvilínea pero no rotará sobre si misma.

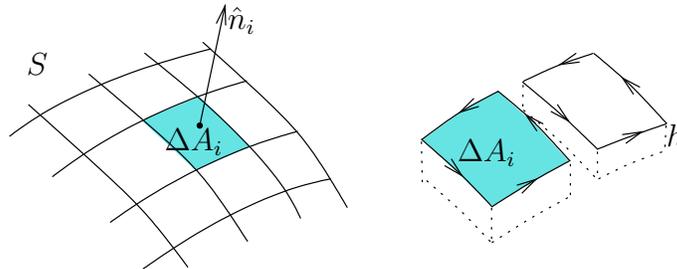


5.3. Bosquejo de la demostración del teorema de Stokes

Supongamos que estamos bajo las condiciones del enunciado del teorema de Stokes. En esta sección daremos una idea de cómo se puede demostrar este resultado apelando a la caracterización límite del rotor dada por (5.1). Comenzamos por descomponer la superficie S en pequeños “cuadrados” S_i de área ΔA_i y normal \hat{n}_i (siguiendo la dirección dada por \hat{n}) como se muestra en la figura:



Sea ∂S_i la curva cerrada definida como la frontera de la superficie S_i , orientada de manera coherente con la normal \hat{n}_i . Además, a cada una de estas superficies S_i le asociamos un paralelepípedo Ω_h^i de base ΔA_i y altura h como se muestra en la siguiente figura



Para cada i fijemos un punto $\vec{r}_i \in \Omega_h^i$. Debido a (5.1), se tiene que

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_i) \simeq \frac{1}{h\Delta A_i} \iint_{\partial S_i} \hat{n} \times \vec{F} dA. \quad (5.4)$$

Dado que la normal a las tapas superior e inferior del paralelepípedo Ω_h^i es $\hat{n} = \hat{n}_i$ y $\hat{n} = -\hat{n}_i$, respectivamente, notamos que el producto $\hat{n}_i \cdot \iint \hat{n} \times \vec{F} dA$ es cero cuando la integral de superficie en cuestión es calculada en estas tapas. Además, para los cuatro lados restantes del paralelepípedo Ω_h^i se tiene que

$$\hat{n}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{F}) = -\hat{n}_i \cdot (\vec{F} \times \hat{n}) = \vec{F} \cdot (\hat{n}_i \times \hat{n}) = \vec{F} \cdot \hat{T},$$

donde \hat{T} es el vector tangente a la curva ∂S_i . Entonces, recordando que $d\vec{r} = \hat{T} dr$, de la ecuación (5.4) se obtiene

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i \simeq \frac{1}{h\Delta A_i} \int_0^h \left(\oint_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) dh.$$

La última igualdad es válida para toda altura h suficientemente pequeña, por lo que al hacer tender h a cero se infiere que

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \simeq \oint_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Sumando esta expresión para todas las superficies S_i , se deduce lo siguiente

$$\sum_i \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \simeq \sum_i \oint_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.5)$$

Notemos que en la última igualdad en (5.5) hemos usado que las integrales asociadas a los lados internos de los paralelepípedos Ω_h^i se anulan entre sí. Finalmente, se concluye notando que el lado izquierdo de (5.5) converge a la integral $\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A}$ cuando la malla se hace cada vez más fina.

Para que esta demostración sea rigurosa, falta justificar que los errores en las aproximaciones realizadas pueden hacerse arbitrariamente pequeños y por lo tanto se anulan en el límite.

5.4. Rotor en coordenadas ortogonales

Sea $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas ortogonales $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ cuyo triedro \hat{u} , \hat{v} y \hat{w} satisface la regla de la mano derecha. Utilizaremos las mismas notaciones de la sección 4.3. En particular, consideramos la familia $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ dada por (4.5) y $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase \mathcal{C}^1 , definido en un abierto Ω que satisface que $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0, w_0) \in \overline{\Omega_\varepsilon} \subseteq \Omega$ para todo $\varepsilon > 0$ pequeño.

Expresamos el campo vectorial en las coordenadas ortogonales como

$$\vec{F} = F_u \hat{u} + F_v \hat{v} + F_w \hat{w}.$$

Para obtener $\operatorname{rot}(\vec{F})(\vec{r}_0)$ expresado en las coordenadas dadas por \vec{r} , usaremos la escritura

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u}) \hat{u} + (\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{v}) \hat{v} + (\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{w}) \hat{w},$$

donde todos los términos están evaluados en \vec{r}_0 . Para esto, daremos una caracterización límite del rotor válida en este contexto, alternativa a (5.1), que proviene de utilizar apropiadamente el teorema de Stokes.

Comencemos por considerar la superficie $S_\varepsilon^1 = \{\vec{r}(u_0, v, w) \mid v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon, w_0 \leq w \leq w_0 + \varepsilon\}$, que es exactamente la misma de la sección 4.3, y la curva cerrada $\Gamma_\varepsilon = \partial S_\varepsilon^1$ que corresponde a la frontera de S_ε^1 . Recordemos que el campo de normales sobre la superficie S_ε^1 , exteriores a Ω_ε , está dado por $\hat{n} = \hat{u}(u_0, v, w)$, $(v, w) \in (v_0, v_0 + \varepsilon) \times (w_0, w_0 + \varepsilon)$. Recorramos Γ_ε en sentido positivo respecto a la orientación dada por el campo de normales. En consecuencia, por el teorema de Stokes se tiene que

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_\varepsilon^1} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iint_{S_\varepsilon^1} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u} dA = [\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u}](\vec{r}_\varepsilon) A(S_\varepsilon^1),$$

donde para la última igualdad usamos el teorema de valor medio para integrales múltiples de modo que $\vec{r}_\varepsilon = \vec{r}(u_0, v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ para algún par $(v_\varepsilon, w_\varepsilon) \in (v_0, v_0 + \varepsilon) \times (w_0, w_0 + \varepsilon)$. Por lo tanto, por continuidad de las derivadas de \vec{F} , se sigue que

$$[\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u}](\vec{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon^1)} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.6)$$

Ahora bien, al descomponer la integral de trabajo del numerador en cuatro integrales, cada una asociada a uno de los segmentos que constituyen Γ_ε y que son aristas de un lado de S_ε^1 , obtenemos, con algo de abuso de notación, que

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{v_0+\varepsilon}^{v_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{w_0+\varepsilon}^{w_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(u_0, v, w_0)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}_{F_v(u_0, v, w_0)h_v(u_0, v, w_0)} dv + \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} F_w(u_0, v_0 + \varepsilon, w)h_w(u_0, v_0 + \varepsilon, w)dw \\ &\quad - \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} F_v(u_0, v, w_0 + \varepsilon)h_v(u_0, v, w_0 + \varepsilon)dv - \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} F_w(u_0, v_0, w)h_w(u_0, v_0, w)dw, \end{aligned}$$

que gracias al teorema fundamental del cálculo implica

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w)(u_0, v, w)dv dw - \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)(u_0, v, w)dw dv \\ &= \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v) \right](u_0, v, w)dv dw \\ &= \iint_{S_\varepsilon^1} \frac{1}{h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v) \right] dA. \end{aligned}$$

Luego, por (5.6), se tiene

$$[\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u}](\vec{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon^1)} \iint_{S_\varepsilon^1} \frac{1}{h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v) \right] dA.$$

Utilizando una vez más el teorema del valor medio para integrales múltiples y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se deduce finalmente que

$$\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{u} = \frac{1}{h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v) \right].$$

Argumentos análogos para las otras dos componentes permiten obtener expresiones similares para $\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{v}$ y $\text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{w}$, probando así la fórmula (1.13).

Problemas de recapitulación

Problema 1. ¹

- (a) Dado $\vec{F} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto, pruebe que $\operatorname{div}(\nabla \times \vec{F}) = 0$.
- (b) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (e^z - x^2y)\hat{i} + (z + xy^2)\hat{j} + y^2\sqrt{1+z^4}\hat{k}$. Calcule $\nabla \times \vec{F}$.
- (c) Sea S la superficie del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal superior (exterior a la esfera). Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde \vec{F} es el campo vectorial de la parte (b).

Problema 2. ² En lo que sigue denotamos $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

- (a) Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{k}$ (coordenadas cilíndricas). Sea S la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2/4$. Bosqueje S y calcule el flujo de \vec{F} a través de la superficie S orientada según la normal exterior al cubo.
- (b) Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \cos(\varphi)\hat{\theta}$ (coordenadas esféricas). Utilice el Teorema de Stokes para calcular el trabajo de \vec{F} a lo largo de la curva que resulta de intersectar el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con el plano $x = 1$. Haga un bosquejo indicando la orientación de la curva y de la normal escogida.

Problema 3. ³ Sea \vec{r} el campo vectorial dado por $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Dada una superficie regular S y un vector fijo $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada} \end{cases}$$

donde S y ∂S tienen orientaciones compatibles (explique).

Problema 4. ⁴ Sea \vec{v} un campo definido por

$$\vec{v}(x, y, z) = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}.$$

¹Examen. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: F. Álvarez, R. Correa, P. Gajardo

²Examen. Primavera 2001. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

³Control 1. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁴Control 1. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: R. Correa, P. Gajardo

Considere las siguientes regiones del espacio

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y \geq 0\} \\ H_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\} \\ D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\} \end{aligned}$$

(a) Dibuje la curva $\mathfrak{C} = (H_1 \cup H_2) \cap D$ y la superficie S que ella define.

(b) Calcule directamente

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

(c) Verifique el resultado anterior mediante el Teorema de Stokes.

Problema 5.⁵ Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se define $n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.

(i) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos(t), -r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 4\pi]$.

(iv) Γ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj. Pregunta: ¿Es \vec{F} un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Dada Γ curva cerrada en torno al origen $(0, 0)$, se le llama a $n(\Gamma)$ el *número de enrollamiento anti-horario* de Γ . Justifique esta terminología.

(b) Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{\varphi}(t) = (2r - r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ . Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.

Ind.: Busque g de la forma $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (recuerde que $\frac{d}{dt}(\operatorname{arctg})(t) = \frac{1}{1+t^2}$).

(c) ¿Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b)? Justifique.

Problema 6. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \|\vec{r}\|$ y la superficie $\Sigma = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq r \leq b\}$ orientada hacia el exterior. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase \mathcal{C}^1 tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}.$$

⁵Control 1. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas. Prof. Felipe Álvarez

(a) Verificar que

$$r^2 \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \frac{d}{dr}(r^3 f(r^2)).$$

(b) Concluir que

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi(b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2)).$$

(c) Con la misma notación, sea \mathcal{C} una curva de extremos $O = (0, 0, 0)$ y $A = (0, 0, a)$, regular por pedazos, recorrida desde O hasta A . Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^a f(t) dt.$$

Indicación: Calcular $\operatorname{rot} \vec{F}$.

Problema 7. ⁶ Sea Σ la parte de la superficie del toro de radios R, a ($R > a$) encerrada por la esfera de radio R . Considere Σ orientada según la normal exterior al toro. Calcule:

(a) El flujo a través de Σ del campo eléctrico debido a una carga puntual q en el origen.

(b) $\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$ para el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, \exp(xy)).$$

Problema 8. ⁷ Considere el volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |z| \leq 2 - x^2 - y^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la región Ω .

(b) Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho \hat{\rho}$ (en coordenadas cilíndricas) a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior.

(c) Calcular el trabajo del campo $\vec{F} = \rho \hat{\rho}$ a lo largo de la curva que se obtiene al intersectar las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ con $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (precisar la orientación escogida para la curva).

Problema 9. ⁸ Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regular definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$ ($a > 0$), $x \geq 0$ y $z \geq 0$

(a) Bosqueje y encuentre una parametrización de la superficie S .

⁶Examen. Primavera 1997. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

⁷Control 1. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

⁸Control 1. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

- (b) Escoja una orientación para S y calcule el flujo a través de S del campo vectorial en coordenadas cilíndricas: $\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \cos^2\theta e^{\cos^3\theta}\hat{\theta}$.
- (c) Calcule el trabajo del campo \vec{F} de la parte (b) al recorrer la curva que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. Haga un bosquejo de esta curva y precise el sentido de recorrido.

Problema 10.⁹ Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie caracterizada por $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

- (a) Encuentre una parametrización regular de S y obtenga un campo de normales a S . Bosqueje S en un gráfico.
- (b) Calcule el flujo a través de S orientada según el campo de normales obtenido en (a), para el campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{j} + \hat{k}$.

Problema 11.¹⁰ En lo que sigue denotamos $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

- (a) Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{k}$ (coordenadas cilíndricas). Sea S la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2/4$. Bosqueje S y calcule el flujo de \vec{F} a través de la superficie S orientada según la normal exterior al cubo.
- (b) Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \cos(\varphi)\hat{\theta}$ (coordenadas esféricas). Utilice el Teorema de Stokes para calcular el trabajo de \vec{F} a lo largo de la curva que resulta de intersectar el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con el plano $x = 1$. Haga un bosquejo indicando la orientación de la curva y de la normal escogida.

Problema 12.¹¹ Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho^2}\hat{\rho} + e^{-\rho^2}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas) y S el casquete esférico de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

- (a) Calcule el flujo de \vec{F} a través de la porción de S que se encuentra en la región $x^2 + y^2 \geq 1$ (orientar S según la normal exterior).
- (b) Calcule $\text{rot}(\vec{F})$ y el trabajo de \vec{F} a lo largo de la curva obtenida al intersectar S con la superficie de ecuación $x = y^2 + z^2$ (escoja una orientación para la curva, indicándola mediante un bosquejo).

Problema 13.¹² De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

- (a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

⁹Control 1. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

¹⁰Examen. Primavera 2001. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

¹¹Control 2. Primavera 2001. Matemáticas Aplicadas.

¹²Control 2. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

- (b) Calcule directamente el flujo de \vec{F} a través del casquete esférico $r = a$ ($a > 0$) orientado según la normal exterior.
- (c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ (recuerde que $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$).
- (d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV.$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Problema 14.¹³ Sean $\Omega \subset \Omega'$ dos abiertos acotados en \mathbb{R}^3 . Suponga que $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos y sea $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f, g \in C(\Omega'; \mathbb{R})$ y \hat{n} es la normal exterior a Ω . Pruebe que para todo $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$

$$\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \iint_{\partial\Omega} v g dA - \iiint_{\Omega} v f dV.$$

Muestre que si $f(x, y, z) = 1/x$ y $g \equiv 0$ entonces

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dV = -\operatorname{Vol}(\Omega),$$

donde en este caso Ω no intersecta el plano YZ (de ecuación $x = 0$).

¹³Control 2. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

Parte II

Funciones de Variable Compleja

Capítulo 6

El plano complejo

En este capítulo recordaremos algunas definiciones y propiedades básicas de los números complejos. El lector familiarizado con estos conceptos puede pasar directamente al capítulo 7.

6.1. Estructura algebraica del plano complejo

La estructura algebraica usual de \mathbb{R}^2 es la de espacio vectorial sobre el cuerpo¹ de los números reales definida por las operaciones de adición

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y multiplicación por escalar

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b),$$

donde $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$. Desde el punto de vista algebraico, el plano complejo \mathbb{C} no es otra cosa que \mathbb{R}^2 dotado de la operación adicional *producto* definida por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Este producto² entre vectores de \mathbb{R}^2 puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ resulta ser un cuerpo conmutativo, el cual se denota simplemente por \mathbb{C} . Por otra parte, \mathbb{C} contiene una *copia* isomorfa del cuerpo de los números reales \mathbb{R} . Más precisamente, la función

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ a &\rightarrow h(a) = (a, 0) \end{aligned}$$

¹Para las definiciones de espacio vectorial y de cuerpo, el lector puede ver el apunte del curso de Álgebra.

²No debe confundirse la operación \cdot con el producto interno estándar, también conocido como *producto escalar*, y que se define como $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$.

es un isomorfismo que permite identificar \mathbb{R} con el eje $\{(a, 0) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\}$.

Históricamente, los números complejos fueron introducidos con el fin de resolver ecuaciones algebraicas que no tienen solución en los números reales. El ejemplo canónico es la ecuación

$$x^2 = -1.$$

Consideremos el complejo $(0, 1)$, el cual satisface

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Denotando $i = (0, 1)$ e identificando $(-1, 0)$ con -1 vía el isomorfismo h , podemos escribir

$$i^2 = -1,$$

de modo tal que i es una solución de la ecuación anterior³.

Notemos además que las identificaciones anteriores permiten escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib,$$

donde el producto entre i y b se denota simplemente ib . De ahora en adelante, el número complejo $z = (a, b)$ será denotado $a + ib$, y diremos que su parte real es a y que su parte imaginaria es b , lo que se escribe $a = \text{Re}(z)$ y $b = \text{Im}(z)$ respectivamente.

El *complejo conjugado* de $z = a + ib$ se define por

$$\bar{z} = a - ib,$$

y geoméricamente corresponde a reflejar z con respecto al eje horizontal asociado a los números reales. Notemos que:

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$
- $\bar{z} = z$ ssi $z \in \mathbb{R}.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\bar{z}} = z$, y además $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ si $z = a + ib.$
- $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}).$
- $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$

Sea $z = a + ib \neq 0$; para determinar su inverso z^{-1} multiplicamos por \bar{z} a ambos lados de la ecuación $z \cdot z^{-1} = 1$, obteniendo así $(z \cdot \bar{z})z^{-1} = \bar{z}$. Pero la condición $z \neq 0$ implica que $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 > 0$, por lo tanto

$$z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

³Los números complejos son muy útiles en Ingeniería Eléctrica, donde el símbolo i se reserva para denotar la *corriente* mientras que se usa j para el complejo $(0, 1)$; nosotros utilizaremos i para denotar este último.

Ahora bien, dados $z = a + ib \neq 0$ y $w = c + id$, para calcular w/z utilizamos las siguientes identidades:

$$\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

A partir de lo anterior se deducen todas las reglas usuales del álgebra de los números complejos, las cuales se dejan al lector como ejercicio.

6.2. Estructura métrica del plano complejo

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, su *módulo* se define como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

y la *distancia* entre dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se define como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0, |\bar{z}| = |z|, |Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$.
- $|z| = 0$ ssi $z = 0$. En términos de la función distancia: $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. En términos de la función distancia, se obtiene como consecuencia la desigualdad triangular:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Observemos que $|a + ib|$ coincide con la norma euclidiana $\|(a, b)\|$ del vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, y por lo tanto corresponde a la distancia entre el punto (a, b) y el origen del plano cartesiano. De este modo, \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 tienen la misma estructura *topológica*, lo que significa que las nociones de vecindad, conjunto abierto, conjunto cerrado, compacidad y convergencia son las mismas.

En consecuencia:

1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice *abierto* si para todo punto $z_0 \in A$ existe un radio $\rho > 0$ tal que el *disco*

$$D(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$$

está contenido en A (ver figura 6.1).

2. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice *cerrado* si su complemento $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ es abierto. Ejemplo: el *disco cerrado* definido por

$$\bar{D}(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$$

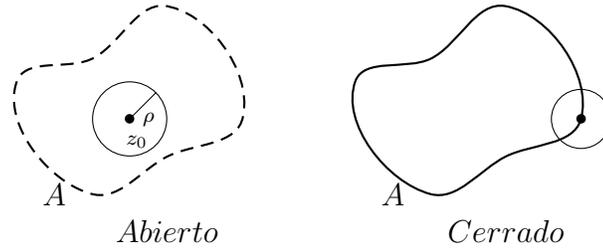


Figura 6.1: Conjunto abierto y cerrado

es un conjunto cerrado pues tiene como complemento al conjunto

$$\overline{D}(z_0, \rho)^c = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho\},$$

y es fácil verificar que este último es abierto.

3. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice *acotado* si existe un radio $\rho_0 > 0$ tal que $A \subseteq D(0, \rho_0)$.
4. Un conjunto se dice *compacto* si es cerrado y acotado.
5. Una sucesión de números complejos $z_n = a_n + ib_n$ se dice que *converge* al complejo $z = a + ib$, y se escribe $z_n \rightarrow z$, si se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0,$$

o, equivalentemente, si se tiene que $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$ como sucesiones de números reales.

Propiedad. Si $(z_n) \subset \mathbb{C}$ es una sucesión acotada entonces admite una subsucesión convergente.

Demostración. Es directo de la compacidad de sucesiones en \mathbb{R}^2 . ■

Finalmente, recordemos que un conjunto A se dice *conexo* (o también *conexo por caminos*), si dados dos puntos cualesquiera del conjunto existe una curva regular por trozos que los une y que está completamente contenida en A .

6.3. Representación polar y raíces de la unidad

Sea $z = x + iy$ un número complejo, que como sabemos corresponde a un punto P de coordenadas cartesianas x e y . Pero P también puede describirse en coordenadas polares r y θ . Más precisamente, tenemos

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ y θ es el ángulo en radianes entre el eje OX y el segmento que une el origen con P ; se dice que θ es el *argumento* de z .

Una característica importante de θ que puede llevar a confusión es que no está únicamente determinado, pues si θ es un valor para el ángulo entonces para cualquier entero $k \in \mathcal{Z}$, el valor $\theta + 2k\pi$ también es válido para describir el mismo punto. Para evitar esta ambigüedad, se suele restringir el valor de θ al intervalo $] -\pi, \pi]$, en cuyo caso se dice que θ es el *valor principal del argumento* de z y se escribe

$$\theta = \arg z.$$

En la sección 8.2.1 veremos que es posible dar un sentido a la función exponencial evaluada en

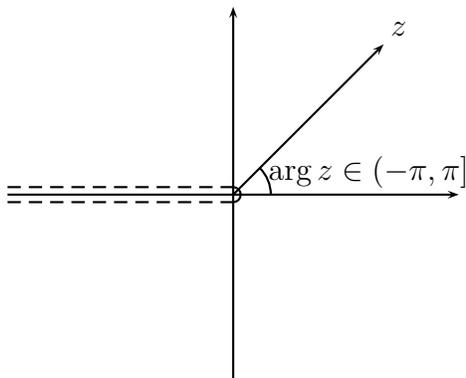


Figura 6.2: Valor principal del argumento

un número complejo, a partir de lo cual es posible obtener la *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Esto permite escribir

$$z = r e^{i\theta} = |z| e^{i \arg(z)}.$$

Más aún, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;
- si $r_2 > 0$ entonces $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

Así,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi},$$

y en particular se tiene que multiplicar un complejo por $e^{i\theta}$ corresponde a rotar el segmento que lo une con el origen en θ radianes. Además, como $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta} \dots e^{i\theta} = e^{i(\theta + \dots + \theta)} = e^{in\theta}$, se deduce la *fórmula de Moivre*

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Por otra parte, dado $k \in \mathcal{N}$, las raíces k -ésimas de la unidad son aquellos complejos que satisfacen $z^k = 1$. Utilizando la representación polar $z = r e^{i\theta}$ se tiene:

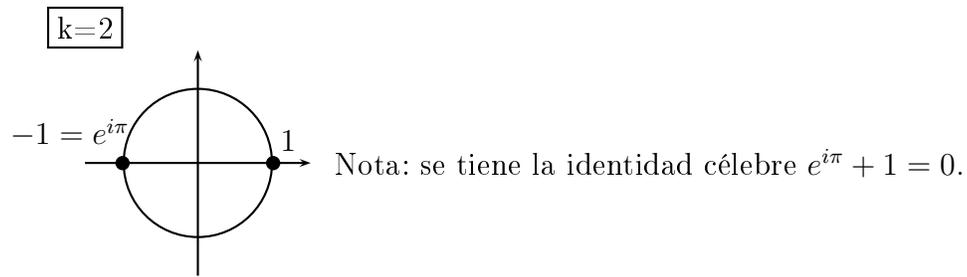


Figura 6.3: Raíces cuadradas de la unidad

$$\begin{aligned}
 z^k = 1 &\Leftrightarrow r^k e^{ik\theta} = 1 \Leftrightarrow r^k = 1, \quad k\theta = 0 \pmod{2\pi} \\
 &\Leftrightarrow r = 1, \quad \theta = 0, \left(\frac{2\pi}{k}\right), 2\left(\frac{2\pi}{k}\right), \dots, (k-1)\left(\frac{2\pi}{k}\right) \\
 &\Leftrightarrow z = 1, e^{i\frac{2\pi}{k}}, e^{2i\frac{2\pi}{k}}, \dots, e^{(k-1)i\frac{2\pi}{k}}
 \end{aligned}$$

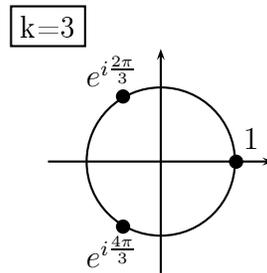


Figura 6.4: Raíces cúbicas de la unidad

Capítulo 7

Continuidad y derivación

En todo lo que sigue, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

7.1. Funciones continuas

Definición 7.1.1. Diremos que f es continua en $z_0 \in \Omega$ si para toda sucesión $(z_n)_{n \geq 1} \subseteq \Omega$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ se tiene que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$, lo que se escribe de forma compacta como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

o de manera equivalente

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0.$$

Si lo anterior es cierto para todo $z_0 \in \Omega$, decimos simplemente que f es continua en Ω y escribimos $f \in C(\Omega)$.

Por otra parte, dado $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ tiene una parte real y otra imaginaria; en consecuencia, se puede escribir

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

o bien

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

donde las funciones¹ $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son a valores en \mathbb{R} . Es directo verificar que $f = u + iv$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0) . En particular, las operaciones de suma, producto, ponderación por escalar, composición y cociente (cuando está bien definido) de funciones continuas preservan la continuidad.

Ejemplos 7.1.2.

1. Si $f(z) = z^2$ entonces

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy,$$

¹El dominio de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ es igual a Ω , visto este último como subconjunto de \mathbb{R}^2 .

de modo tal que

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

y

$$v(x, y) = 2xy.$$

Dado que u y v son continuas en \mathbb{R}^2 , $f(z) = z^2$ es continua en \mathbb{C} .

2. Si $f(z) = 1/z$ entonces

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

y esta función es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

7.2. Derivada compleja: condiciones de Cauchy-Riemann

Por analogía al caso de una variable real, se introduce la siguiente definición.

Definición 7.2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función.

- Diremos que f es derivable en $z_0 \in \Omega$, si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

cuyo valor $f'(z_0)$ lo llamaremos la derivada de f en z_0 ,

- Si f es derivable en todo $z_0 \in \Omega$ diremos que es holomorfa en Ω .
- El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota $H(\Omega)$, es decir

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}.$$

Notemos que si f es derivable en z_0 entonces

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

En particular, si f es derivable en z_0 entonces f es continua en z_0 .

Supongamos que $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. A continuación relacionaremos la derivada $f'(z_0)$ con las derivadas parciales de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ en (x_0, y_0) . Comencemos por tomar $z = z_0 + h$, con $h \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)}{h} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}.$$

Se tendrá en particular que

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Del mismo modo, es posible repetir un análisis similar al anterior para $z = z_0 + ih$ con $h \in \mathbb{R}$. En tal caso tendremos

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \frac{u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h)}{ih} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{ih} \\ &= \frac{-iu(x_0, y_0 + h) + v(x_0, y_0 + h)}{h} - \frac{-iu(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} - i \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h}.$$

Así,

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Por unicidad del límite en la definición de derivada, debe cumplirse la igualdad de las dos expresiones recién calculadas para $f'(z_0)$. De este modo, igualando las partes real e imaginaria se obtiene

$$(C-R) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{cases}$$

que se conocen como las *condiciones de Cauchy-Riemann*. Cabe señalar que este desarrollo sólo asegura que estas condiciones son necesarias para la existencia de la derivada de f en z_0 . Veremos a continuación que en realidad estas igualdades resultan ser condiciones **necesarias y suficientes** para la derivabilidad de una función en un punto. Para ello, notemos que, de manera equivalente, f es derivable en z_0 si existe algún complejo $f'(z_0) = a + ib$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - (a + ib)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Expresando el producto $(a + ib)(z - z_0)$ en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

vemos que la derivabilidad de f en z_0 equivale a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\left\| \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|} = 0,$$

lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema 7.2.2. *Una función de variable compleja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ ssi es Fréchet-derivable en (x_0, y_0) como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

En tal caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ejemplos 7.2.3.

1. Consideremos

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Las funciones $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ son (Fréchet)-derivables en todo \mathbb{R}^2 pues todas sus derivadas parciales son continuas en \mathbb{R}^2 . Más aún, es directo verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en todo \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego

$$f'(z_0) = 2x_0 + i2y_0 = 2z_0.$$

2. Sea

$$f(z) = z^3 = (x^3 - 3y^2x, 3x^2y - y^3).$$

Nuevamente por Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3(x^2 - y^2) = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego

$$f'(z_0) = 3(x_0^2 - y_0^2) + i6x_0y_0 = 3z_0^2.$$

3. Tomemos ahora

$$f(z) = z^k,$$

con $k > 0$ un entero fijo. Veremos por definición que

$$f'(z_0) = kz_0^{k-1}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |(z_0 + h)^k - z_0^k - kz_0^{k-1}h| &= \left| \sum_{l=2}^k \binom{k}{l} z_0^{k-l} h^l \right| \\ &= |h^2| \left| \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j+2} z_0^{k-2-j} h^j \right| \\ &\leq |h|^2 \sum_{j=0}^{k-2} \frac{k!}{(j+2)!(k-2-j)!} |z_0|^{k-2-j} |h|^j \\ &\leq |h|^2 k(k-1) \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(k-2)!}{j!(k-2-j)!} |z_0|^{k-2-j} |h|^j \\ &= |h|^2 k(k-1)(|z_0| + |h|)^{k-2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\left| \frac{(z_0 + h)^k - z_0^k}{h} - kz_0^{k-1} \right| \leq |h| \cdot k(k-1)(|z_0| + |h|)^{k-2} \rightarrow 0.$$

Las reglas usuales para la derivación de sumas, productos, cuocientes, ponderación por escalar y composición de funciones son válidas. A continuación enunciamos estas propiedades, cuyas demostraciones quedan como ejercicio al lector.

7.3. Propiedades básicas de la derivada compleja

Reglas de derivación:

1. Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones derivables en z_0 y sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces la función $h = \alpha f + g$ también es derivable en z_0 y se tiene

$$h'(z_0) = (\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$

2. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son derivables en z_0 entonces el producto fg es derivable en z_0 y se tiene

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

3. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son derivables en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ entonces el cuociente f/g es derivable en z_0 y se tiene

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

4. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $f(z_0) \in D$ entonces la composición $g \circ f$ es derivable en z_0 y se tiene

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

En particular, todo polinomio

$$p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_kz^k$$

es holomorfo en \mathbb{C} con

$$p'(z_0) = c_1 + 2c_2z_0 + \dots + kc_kz_0^{k-1}.$$

Similarmente,

$$f(z) = \frac{1}{z^k}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con

$$f'(z_0) = -\frac{k}{z_0^{k+1}}, \quad \forall z_0 \neq 0.$$

Por otra parte, es evidente que si $f \equiv C$ con $C \in \mathbb{C}$ una constante entonces $f' \equiv 0$. Para la recíproca se tiene:

Proposición 7.3.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con Ω un conjunto abierto y conexo. Si $f' \equiv 0$ en Ω entonces f es constante en Ω .*

Demostración. Sea $f = u + iv \in H(\Omega)$ tal que $f' \equiv 0$ en Ω . Por Cauchy-Riemann, se tiene

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Como Ω es conexo, se deduce que existen dos constantes reales C_1 y C_2 tales que $u \equiv C_1$ y $v \equiv C_2$, y en consecuencia $f \equiv C_1 + iC_2$ en Ω . ■

Diremos que una función holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una *primitiva* de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si

$$\forall z \in \Omega, \quad F'(z) = f(z).$$

Corolario 7.3.2. *Sean $F, G \in H(\Omega)$ dos primitivas de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde Ω es un abierto conexo. Entonces $\exists C \in \mathbb{C}$ tal que $\forall z \in \Omega, F(z) = G(z) + C$.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 7.3.1 a la función $H = F - G$. ■

7.4. Ejercicios

- Para las siguientes funciones, determine aquellas que son holomorfas en todo \mathbb{C} y calcule su derivada:
 - $f(z) = \bar{z}$.
 - $f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.
 - $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.
 - $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, $z = x + iy$.
- Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
- Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.
- Sean $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de \mathbb{C} , entonces $u + iv$ es constante.
- Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0 .
- Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa para la cual existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ no nulas tales que $au(x, y) + bv(x, y) = c$. Probar que f es constante.
- Sea $u = u(x, y)$ una función de clase C^2 en \mathbb{R}^2 . Pruebe que si u es *armónica*, i.e. $\Delta u = 0$, entonces existe una función $v = v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en \mathbb{C} . Indicación: verifique que el campo $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{j}$ es conservativo.
- Se sabe que $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $f(z)$. Encuentre la parte imaginaria $v(x, y)$ sabiendo que $f(1) = 1 - i$.

7.5. Problemas

Problema 7.1. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

- Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
- Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

- (c) Explícite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.
- (d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

Problema 7.2. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Considere los campos en \mathbb{R}^3 definidos por $\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}$ y $\vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\hat{i} - u(x, y)\hat{j}$.

- (a) Pruebe que \vec{w} y \vec{w}_1 son conservativos si y sólo si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, en cuyo caso decimos que u y v son funciones *conjugadas*.
- (b) Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces $\Delta u = \Delta v = 0$ (decimos que u y v son *armónicas*) y además $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
- (c) Pruebe que si $u(x, y)$ es armónica entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u . Indicación: note que lo anterior es equivalente a probar que un cierto campo es conservativo.

Problema 7.3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con Ω abierto no vacío. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables.

Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Capítulo 8

Funciones en serie de potencias

Hemos visto que las funciones algebraicas, entendidas como sumas (finitas), productos, cuocientes y potencias de polinomios en z , son funciones holomorfas en todo \mathbb{C} . En este capítulo extenderemos varias funciones *trascendentes* de una variable real al plano complejo utilizando sus expresiones en series de potencias, obteniendo así nuevas funciones holomorfas.

8.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea $(c_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos y $a \in \mathbb{C}$ un punto dado. Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos la suma parcial

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^N c_k (z - a)^k.$$

Recordemos que dada una sucesión de números reales (a_n) , se define el *límite superior* de la sucesión como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \in (0, +\infty].$$

El $\limsup a_n$ es el supremo de los puntos de acumulación de la sucesión.

Teorema 8.1.1. *Sea*

$$R = 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

con la convención $1/0 = \infty$. Entonces

1. $S_N(z)$ converge si $|z - a| < R$ y diverge si $|z - a| > R$. Al número R se le llama radio de convergencia de la serie.
2. La serie $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$ es holomorfa en $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ con

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1}.$$

Demostración. Supongamos para simplificar que $a = 0$, el caso general se hace igual.

- Si $|z| < R \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|}|z| \leq \varepsilon < 1$ para todo k suficientemente grande, luego

$$\begin{aligned} |S_{N+m}(z) - S_N(z)| &\leq \sum_{k=N+1}^{N+m} |c_k| |z|^k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[k]{|c_k|}|z|\right)^k}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq \frac{\varepsilon^{N+1}}{1 - \varepsilon} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego, $(S_N(z))_{N \geq 1}$ es de Cauchy en \mathbb{C} , y por lo tanto es convergente.

- Supongamos que $|z| > R$. Por una parte, tenemos que $|S_N(z) - S_{N-1}(z)| = |c_N||z|^N$. Si $S_N(z)$ converge entonces necesariamente $|S_N(z) - S_{N-1}(z)| \rightarrow 0$. Escojamos una subsecuencia N_k tal que

$$\sqrt[N_k]{|c_{N_k}|} \rightarrow 1/R.$$

En particular, dado $\varepsilon > 0$ se tendrá que para todo k suficientemente grande $\sqrt[N_k]{|c_{N_k}|} > 1/(R + \varepsilon)$, y en consecuencia

$$|c_{N_k}||z|^{N_k} > [|z|/(R + \varepsilon)]^{N_k}.$$

Escogiendo $\varepsilon > 0$ tal que $R + \varepsilon < |z|$ (esto es posible pues hemos supuesto que $|z| > R$), se deduce que

$$|c_{N_k}||z|^{N_k} > \theta^{N_k} \text{ con } \theta > 1.$$

Luego, $|S_{N_k}(z) - S_{N_k-1}(z)| \geq \theta^{N_k} \rightarrow \infty$, y por lo tanto $S_N(z)$ no converge.

Demostremos ahora que la serie $S(z)$ es derivable término a término tal como se establece en el enunciado. Comencemos por notar que como $\limsup_k \sqrt[k]{k|c_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|}$, entonces ambas series tienen el mismo radio de convergencia. Sea $z_0 \in D(0, R)$ y $h \in \mathbb{C}$ pequeño de modo tal que $|z_0| + |h| \leq R - \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(z_0 + h) - S(z_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z_0^{k-1} \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left[\frac{(z_0 + h)^k - z_0^k}{h} - k z_0^{k-1} \right] \right| \\ &\leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |c_k| (|z_0| + |h|)^{k-2} \\ &\leq |h| \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |c_k| (R - \varepsilon)^{k-2} \right]}_{\text{convergente a un } M < +\infty} \\ &= M|h| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

■

Observación. Si $|z - a| = R$ entonces puede o no haber convergencia, lo que dependerá de cada serie en particular.

Corolario 8.1.2. *Bajo las condiciones del teorema anterior, la serie*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $D(a, R)$, lo que escribimos $S \in C^\infty(D(a, R))$, y más aún

$$\forall n \in \mathbb{N}, S^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) c_k (z-a)^{k-n}.$$

En particular,

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}.$$

8.2. Ejemplos de funciones en serie de potencias

8.2.1. La función exponencial

Definimos la exponencial compleja de $z \in \mathbb{C}$ mediante la serie de potencias

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

El radio de convergencia de esta serie es

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 1/0 = \infty,$$

de modo que la exponencial queda bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Veamos algunas propiedades básicas de la función exponencial.

Propiedades.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x.$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exp(iy) = \cos y + i \operatorname{sen} y.$

En efecto, desarrollando la serie de potencias e identificando sus partes real e imaginaria se obtiene

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= \left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right] + i \left[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right] \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z_1^{k-j} z_2^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} = \exp(z_1) \exp(z_2). \end{aligned}$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

- $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exp'(z_0) = \exp(z_0)$.

Ejercicio: verificarlo usando Cauchy-Riemann.

- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$, es decir $\exp(\cdot)$ es $2\pi i$ -periódica.

- $\exp(\cdot)$ no tiene ceros; más aún, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $z = x + iy$, entonces

$$|\exp(z)| = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

8.2.2. Funciones hiperbólicas

Una vez definida la función exponencial, podemos definir las funciones coseno y seno hiperbólico de una variable compleja de manera similar a como se definen las funciones hiperbólicas de una variable real.

El *coseno hiperbólico* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \\ &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \cosh(x) \cos y + i \operatorname{senh}(x) \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

El *seno hiperbólico* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\operatorname{senh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \\ &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \\ &= \operatorname{senh}(x) \cos y + i \operatorname{cosh}(x) \operatorname{sen} y.\end{aligned}$$

Propiedades.

- $\operatorname{cosh}(-z) = \operatorname{cosh}(z)$ (función par).
- $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$ (función impar).
- Ambas son $2\pi i$ -periódicas.
- $\operatorname{cosh}'(z) = \operatorname{senh}(z)$.
- $\operatorname{senh}'(z) = \operatorname{cosh}(z)$.
- $\operatorname{cosh}^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$.
- $\operatorname{cosh}(z) = 0 \Leftrightarrow z = (\frac{\pi}{2} + k\pi)i, k \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{senh}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

8.2.3. Funciones trigonométricas

Por analogía con el caso real, las funciones trigonométricas coseno y seno de una variable compleja se definen a partir de sus series de potencias¹

El *coseno* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\ &= \operatorname{cosh}(iz) \\ &= \operatorname{cosh}(y) \cos x - i \operatorname{senh}(y) \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

El *seno* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\operatorname{sen} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

¹Las series de potencias del seno y del coseno tienen ambas radio de convergencia igual a infinito.

definida por

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z) &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \\ &= \frac{1}{i} \operatorname{senh}(iz) \\ &= \operatorname{cosh}(y) \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh}(y) \cos x.\end{aligned}$$

Propiedades.

- $\cos(-z) = \cos(z)$ (función par).
- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$ (función impar).
- Ambas son 2π -periódicas.
- $\cos'(z) = -\operatorname{sen}(z)$.
- $\operatorname{sen}'(z) = \cos(z)$,
- $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$.
- $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

8.2.4. Función logaritmo

Aunque nos gustaría definir la función logaritmo de un número complejo $\log(z)$ simplemente como la función inversa de $\exp(z)$, hay dos inconvenientes que nos lo impiden:

1. $\exp(z)$ no es epiyectiva pues $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $\exp(z)$ no es inyectiva pues es $2\pi i$ -periódica.

La primera dificultad es simple de resolver pues basta restringir el dominio del logaritmo al rango de la exponencial, esto es, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aunque el segundo inconveniente es más delicado, veremos a continuación que sí es posible definir

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

de modo tal que se tenga la propiedad

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exp(\log(z)) = z.$$

En efecto, sea $z = re^{i\theta}$ con $r = |z| > 0$ de modo que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para resolver la ecuación $\exp(w) = z$ tomemos $w = x + iy$ de modo que $\exp(w) = e^x e^{iy} =$

$re^{i\theta}$ tiene como solución $x = \ln r$, $y = \theta(\text{mod } 2\pi)$. Luego, el conjunto solución está dado por $\{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$, donde $\arg z \in (-\pi, \pi]$ es el valor principal del argumento de z definido en la sección 6.3.

Así, para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos la determinación k -ésima de la función logaritmo $\log^k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\log^k(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$. La *determinación principal* del logaritmo complejo es la función

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg z.$$

Como la función $\arg z$ es discontinua en \mathbb{R}_- pues pasa de $-\pi$ a π , no podemos esperar que $\log(z)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Propiedades.

- $\exp(\log(z)) = e^{\ln |z|} e^{i \arg z} = z$.
- $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \pmod{2\pi i}$.
- $\log(z)$ es discontinua en \mathbb{R}_- .
- $\log(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y más aún

$$\log'(z_0) = \frac{1}{z_0}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\log(z_0 + h) - \log(z_0)}{h} &= \frac{1}{z_0} \frac{\log(1 + \frac{h}{z_0})}{(\frac{h}{z_0})} \\ &= \frac{1}{z_0} \frac{w}{\exp(w) - \exp(0)} \rightarrow \frac{1}{z_0} \frac{1}{\exp'(0)} = \frac{1}{z_0} \end{aligned}$$

donde $w = \log(1 + \frac{h}{z_0}) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

- Desarrollo en serie en torno a $a = 1$:

Como

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^k \quad \text{si } |z-1| < 1$$

entonces

$$\log'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^k \quad \text{si } |z-1| < 1,$$

y dado que $\log(1) = \ln 1 + i0 = 0$, en virtud del corolario 7.3.2 se tiene

$$\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z-1)^{k+1}$$

siempre que $|z-1| < 1$.

- Desarrollo en serie en torno a $z_0 \notin \mathbb{R}_-$:

Como

$$\frac{z_0}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^k$$

siempre que $|z - z_0| < |z_0|$ entonces para todo z en la *componente conexa por caminos* del conjunto $D(z_0, |z_0|) \setminus \mathbb{R}_-$ que contiene a z_0 se tiene

$$\log(z) = \log(z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)z_0^{k+1}} (z - z_0)^{k+1}.$$

8.2.5. Otras funciones

- La *tangente hiperbólica* es la función definida por

$$\tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\operatorname{cosh}(z)}$$

que resulta ser holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(\frac{\pi}{2} + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}$

- La *tangente* es la función definida por

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{cos}(z)}$$

que resulta ser holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

- Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, el *valor principal de la función potencia* está dado por

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log(z)),$$

el cual es una función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Un caso particular importante es el valor principal de la raíz cuadrada:

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2}.$$

8.3. Ejercicios

1. Sabiendo que la serie $S(z) = \sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R_0 > 0$, determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k.$$

2. Pruebe que:

- $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(z+1)^k$, cuando $|z+1| < 1$.
- $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^k$, cuando $|z-2| < 2$.

3. Pruebe que:

- $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh}(z)$.
- $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen}(z)$.
- $\cos(iz) = \operatorname{cosh}(z)$.
- $\operatorname{cosh}(iz) = \cos(z)$.
- $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\bar{z})$
- $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$.
- $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} \operatorname{sen}(x + iy) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} x + i \cos x]$.
- $\lim_{y \rightarrow \infty} \tan(x + iy) = i$.

4. Demostrar que

$$f(z) = \exp(z^2) + \cos(z)$$

es holomorfa en todo el plano complejo y encontrar su serie de potencias en torno a 0.

5. Considere la serie $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ con $a_k = 2$ si k es par y $a_k = 1$ si k es impar. Determine el radio de convergencia R de esta serie y pruebe que ella converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| \geq R$. Compruebe que para $|z| < R$ se tiene

$$S(z) = \frac{2+z}{1-z^2}.$$

6. Determine la serie de potencias en torno a 0 de la función $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}$ indicando su radio de convergencia.

8.4. Problemas

Problema 8.1. Determine el radio de convergencia de las siguientes series:

(i) $\sum (\log(n))^2 x^n$,

(ii) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

Problema 8.2. Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$ y $T_n(z) = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$

(i) Mostrar que $S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z}$.

(ii) Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$, y usando (a) calcular la suma de dicha serie.

Problema 8.3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$. Determine la serie de potencias de f en torno al origen y su radio de convergencia.

Problema 8.4. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $p^\lambda : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \neq 0.$$

(i) Verifique que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p^k(z) = z^k$. Muestre que $\overline{p^\lambda(\bar{z})} = p^{\bar{\lambda}}(z)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde p^λ es holomorfa y pruebe que $(p^\lambda)' = \lambda p^{\lambda-1}$.

(iii) Todo lo anterior justifica que la función p^λ se llame función *potencia generalizada* y que se denote más simplemente por $p^\lambda(z) = z^\lambda$. Muestre que si α, β son reales y $t > 0$ entonces

$$t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha [\cos(\beta \log t) + i \sin(\beta \log t)].$$

Pruebe también que

$$i^i = e^{-\pi/2}.$$

8.5. Resolución de problemas

Solución Problema 8.1

(i) En esta ocasión utilizaremos el *criterio del cociente*, recordando que el cociente de una serie se define por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Se deja al lector ver que sucede cuando se aplica el *criterio de la raíz enésima*.

Desarrollamos el cociente de la serie y obtenemos

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n+1))^2}{(\log n)^2} = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} \right]^2.$$

Utilizando l'Hôpital se llega a

$$\frac{1}{R} = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} \right]^2 = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} \right]^2 = 1.$$

Concluyendo que el radio es $R = 1$.

(ii) En este caso usaremos el *criterio de la raíz enésima*

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Concluimos así que $R = e$.

Solución Problema 8.2

(i) Usamos que

$$\begin{aligned} (1-z) \cdot S_n(z) &= (1-z)(z + 2z^2 + \dots + nz^n) \\ &= (z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n) - (z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \dots + nz^{n+1}) \\ &= z + (2z^2 - z^2) + (3z^3 - 2z^3) + \dots + (nz^n - (n-1)z^n) - nz^{n+1} \\ &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^n - nz^{n+1} \\ &= T_n(z) - nz^{n+1}, \end{aligned}$$

obteniendo que $S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z}$.

(ii) Utilizaremos el criterio de la raíz enésima:

$$1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Aplicamos logaritmo a ambos lados de la igualdad

$$\log\left(\frac{1}{R}\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \log n^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log n.$$

Usando l'Hôpital se llega a

$$\log\left(\frac{1}{R}\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1} = 0,$$

obteniendo que $1/R = 1$, i.e. $R = 1$, que equivale a decir que $\sum_{n \in \mathbb{N}} nz^n < +\infty$ si $|z| < 1$. Calculemos ahora $\sum nz^n$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} nz^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ con } S_n = \frac{T_n - nz^{n+1}}{1 - z}$$

Notemos que

$$T_n = z + z^2 + \dots + z^n = z(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z \sum_{i=0}^{n-1} z^i = z \frac{(1 - z^n)}{1 - z},$$

converge a $z/(1 - z)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $|z| < 1$.

Por otra parte, si $0 < |z| < 1$, se obtiene aplicando l'Hôpital lo siguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n|z|^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/|z|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-|z|^{n+1}}{\ln |z|} = 0.$$

y si $z = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n|z|^{n+1} = 0.$$

Luego

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} nz^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - z} \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - nz^{n+1}) = \frac{z}{(1 - z)^2}.$$

Solución Problema 8.3

Dado que en \mathbb{R} se tiene que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, para f se obtiene

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

donde,

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} n!} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Estudiemos su radio de convergencia:

Primero notamos que el *criterio del cociente* no se aplica directamente, dado que al hacer el cociente este eventualmente se indefine. Por otro lado $f(z)$ se obtiene como la composición de e^z (que tiene radio de convergencia infinito) y $-z^2$, así para cualquier $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $-z^2$ esta dentro del disco de convergencia de e^z , por lo tanto la serie de $f(z)$ converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$, es decir el radio de convergencia de $f(z)$ es $R = +\infty$.

Capítulo 9

Integral en el plano complejo

9.1. Definición

Un *camino* Γ en \mathbb{C} es una curva regular por trozos parametrizada por una función continua y diferenciable por trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que el camino Γ es *cerrado* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. En algunas ocasiones, denotaremos por γ^* a la curva Γ como conjunto imagen de $[a, b]$ vía la parametrización γ , es decir

$$\gamma^* = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subseteq \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Cuando Γ es un camino cerrado se suele escribir

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

para denotar la integral de f sobre Γ .

Más explícitamente, tenemos que si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + v(x(t), y(t)) \dot{x}(t)] dt. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}.$$

Esto muestra que $\int_{\Gamma} f(z)dz$ se calcula a partir de dos integrales de trabajo sobre Γ , vista esta última como una curva en \mathbb{R}^2 .

En particular resulta que la integral compleja es invariante bajo reparametrizaciones regulares de Γ que preservan la orientación; en caso que dos parametrizaciones regulares del camino Γ lo recorran en sentido opuesto, el valor de la integral sólo cambia de signo.

9.2. Propiedades y ejemplos

La siguiente proposición resume algunas de las principales propiedades de la integral compleja.

Proposición 9.2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino parametrizado por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Se tiene:*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in C(\Omega)$

$$\int_{\Gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz.$$

2. $\forall f \in C(\Omega)$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq L(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$

donde $L(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ es la longitud del camino Γ .

3. Si $f \in C(\Omega)$ admite primitiva, i.e. $\exists F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

y en consecuencia el valor de la integral sólo depende de los extremos del camino pero no de la trayectoria recorrida. En particular, si Γ es un camino cerrado entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración.

1. Directo.
2. Comencemos por observar que si $H(t) = U(t) + iV(t)$ entonces

$$\left| \int_a^b H(t) dt \right| = \left| \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt \right| \leq \int_a^b |H(t)| dt.$$

En efecto, sean r_0 y θ_0 tales que $r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b H(t) dt$, de modo que $r_0 = \left| \int_a^b H(t) dt \right|$. Luego,

$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b H(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} H(t) dt,$$

y dado que r_0 es real,

$$\begin{aligned} r_0 = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta_0} H(t) dt &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta_0} H(t)] dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re}[e^{-i\theta_0} H(t)]| dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta_0} H(t)| dt = \int_a^b |H(t)| dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|e^{-i\theta_0}| = 1$, probando así nuestra primera afirmación. Utilizando lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| L(\Gamma). \end{aligned}$$

3. Sea F tal que $F' = f$. Entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))] dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

■

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Corolario 9.2.2. *Si Γ es un camino cerrado en \mathbb{C} y $z_0 \notin \Gamma$ entonces*

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^k dz = 0 \text{ para todo } k \neq -1.$$

Demostración. Basta con observar que si $k \neq -1$ entonces $F'(z) = (z - z_0)^k$ con

$$F(z) = \frac{1}{k+1}(z - z_0)^{k+1}.$$

■

En el caso $k = -1$ se tiene un problema cuando el camino encierra al punto z_0 pues $\log(z - z_0)$ es primitiva de $(z - z_0)^{-1}$ pero sólo para $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0 + \mathbb{R}_-\}$ y por lo tanto no podemos aplicar la proposición 9.2.1 cuando $\Gamma \cap \{z_0 + \mathbb{R}_-\} \neq \emptyset$ como en la figura 9.1.

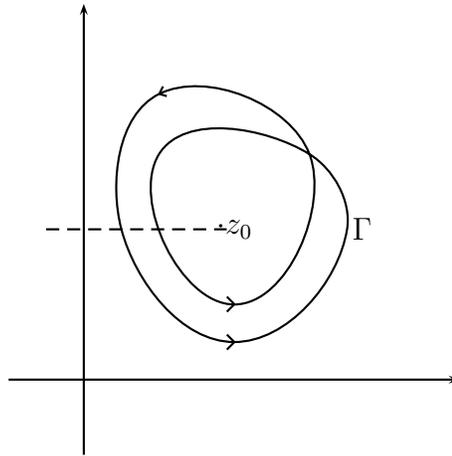


Figura 9.1: Camino cerrado en torno a un punto

En el caso de una función que es expresable como una serie de potencias en un disco se tiene:

Corolario 9.2.3. *Para una serie de potencias*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

con radio de convergencia R se tiene

$$\oint_{\Gamma} S(z) dz = 0$$

para todo camino cerrado Γ contenido en $D(z_0, R)$.

Demostración. Basta con observar que la serie de potencias $S(z)$ tiene como primitiva en $D(z_0, R)$ a la función

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}.$$

■

Resultados como el corolario 9.2.3 pueden ser muy útiles para evaluar integrales reales en base a métodos de variable compleja. El siguiente ejemplo es una ilustración célebre de esta clase de técnica.

Ejemplo 9.2.4. [Integrales de Fresnel]

Las siguientes identidades se conocen como las *integrales de Fresnel*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (9.1)$$

Para probar (9.1) tomemos $R > 0$ y consideremos el camino

$$\Gamma(R) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

tal como se ilustra en la figura 9.2.

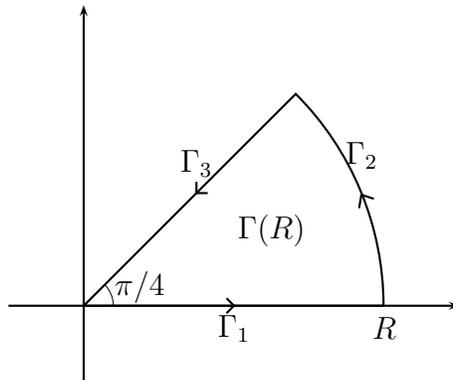


Figura 9.2: Camino para las integrales de Fresnel

Consideremos la función

$$f(z) = \exp(iz^2).$$

Como se trata de la función exponencial, la cual se define como una serie de potencias de radio de convergencia infinito, compuesta con el polinomio $p(z) = iz^2$, se deduce que $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias, cuyo radio de convergencia también es infinito.

Luego,

$$\oint_{\Gamma(R)} \exp(iz^2) dz = 0. \quad (9.2)$$

Por otra parte,

$$\oint_{\Gamma(R)} \exp(iz^2) dz = \int_{\Gamma_1} \exp(iz^2) dz + \int_{\Gamma_2} \exp(iz^2) dz + \int_{\Gamma_3} \exp(iz^2) dz.$$

Estudiamos el comportamiento de cada una de estas integrales cuando $R \rightarrow \infty$:

- Tenemos

$$\int_{\Gamma_1} \exp(iz^2) dz = \int_0^R \exp(ix^2) dx = \int_0^R \cos(x^2) dx + i \int_0^R \operatorname{sen}(x^2) dx,$$

luego

$$\int_{\Gamma_1} \exp(iz^2) dz \rightarrow \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx, \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

- Tenemos

$$\int_{\Gamma_3} \exp(iz^2) dz = \int_R^0 \exp(ir^2 e^{i\pi/2}) e^{i\pi/4} dr = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr,$$

luego

$$\int_{\Gamma_3} \exp(iz^2) dz \rightarrow -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right), \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

- Finalmente

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \exp(iz^2) dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} \exp(iR^2 e^{2i\theta}) R i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &= R \left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)} e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2\theta} d\theta \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} 2\theta} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4R} e^{-\left(\frac{4R^2 \theta}{\pi}\right)} \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4R} [1 - e^{-R^2}] \rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad hemos usado que

$$\forall \alpha \in [0, \pi/2], \operatorname{sen} \alpha \geq 2\alpha/\pi.$$

Por lo tanto, haciendo $R \rightarrow \infty$ en (9.2) se obtiene

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y por un argumento de paridad se deduce que se tiene (9.1).

Definición 9.2.5. Dado $z_0 \notin \Gamma$ con Γ un camino cerrado, se define la indicatriz de Γ en z_0 mediante

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Para evaluar $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z_0)$, parametricemos Γ en coordenadas polares relativas a un origen en el punto z_0 mediante

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)}, \quad t \in [a, b],$$

para algunas funciones $t \in [a, b] \mapsto r(t) > 0$ y $t \in [a, b] \mapsto \theta(t) \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{r(t)e^{i\theta(t)}} [\dot{r}(t)e^{i\theta(t)} + r(t)ie^{i\theta(t)}\dot{\theta}(t)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_a^b \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} dt + i \int_a^b \dot{\theta}(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \left(\frac{r(b)}{r(a)} \right) + i[\theta(b) - \theta(a)] \right] \end{aligned}$$

Como la curva es cerrada $r(a) = r(b)$ de modo que $\ln(r(b)/r(a)) = \ln(1) = 0$ y así

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z_0) &= \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \\ &= \text{número de vueltas de } \Gamma \text{ en torno a } z_0 \text{ en sentido antihorario.} \end{aligned}$$

Un ejemplo de los valores que puede tomar la indicatriz de una curva cerrada se ilustra en la figura 9.3

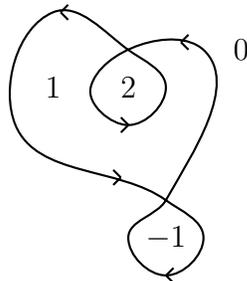


Figura 9.3: Función indicatriz de una curva cerrada

9.3. El teorema de Cauchy-Goursat

Una pregunta interesante es saber si un resultado similar al corolario 9.2.3 es cierto pero sólo bajo el supuesto que f es holomorfa en un dominio Ω , sin saber *a priori* si es o no expresable como una serie de potencias. Un resultado fundamental de la teoría de funciones de variable compleja establece que esto es así siempre que se asuma una propiedad adicional sobre el dominio.

Definición 9.3.1. *Un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo por caminos se dice que es simplemente conexo si todo camino cerrado contenido en Ω encierra solamente puntos de Ω .*

Dicho de otra forma, un conjunto simplemente conexo no tiene *agujeros*.

Definición 9.3.2. *Un camino cerrado simple es un camino que genera dos conjuntos disjuntos abiertos y conexos, uno acotado y el otro no acotado, y ambos conjuntos tienen al camino como frontera.*

En otros términos, un camino cerrado simple es aquél que siendo cerrado no se corta a sí mismo.

Teorema 9.3.3 (Cauchy-Goursat). *Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

para todo camino cerrado, regular por trozos y simple Γ contenido en Ω .

Demostración. Para simplificar, sólo daremos la demostración en el caso en que se supone además que $f'(z)$ es continua¹ en Ω . Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ la región encerrada por el camino Γ . Si $f = u + iv$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i \oint_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} \\ &= \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]}_0 dx dy + i \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right]}_0 dx dy, \end{aligned}$$

esto último en virtud del teorema de Green en el plano (suponiendo que Γ se recorre en sentido antihorario), el cual se puede aplicar pues las derivadas parciales de u y v son continuas. Finalmente, de las condiciones de Cauchy-Riemann se deduce que los integrandos de las dos integrales dobles son nulos en D , lo que prueba el resultado. ■

Observación 9.3.4. El teorema 9.3.3 fue demostrado originalmente por A. Cauchy bajo la hipótesis adicional de que $f'(z)$ es continua en Ω , lo que asumimos en la demostración sólo para simplificar el análisis pues nos permite aplicar directamente el teorema de Green en el plano.

¹Para una demostración en el caso general el lector puede referirse por ejemplo a *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, R.V. Churchill, McGraw-Hill, New York, 1966.

Es generalmente reconocido que el primero en dar una demostración sin asumir la continuidad de $f'(z)$ fue E. Goursat. Esto último es muy importante pues nos permitirá probar que toda función holomorfa es expresable, al menos localmente, como una serie de potencias (ver el teorema 10.2.1).

El resultado anterior puede extenderse a situaciones más generales. Un ejemplo lo constituye el siguiente teorema:

Teorema 9.3.5. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y consideremos*

$$f : \Omega \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

una función holomorfa, donde $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado, regular por trozos, simple y recorrido en sentido antihorario y sea D la región encerrada por Γ . Supongamos que $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que los discos cerrados $\overline{D}(p_j, \varepsilon)$ estén contenidos en D y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z) dz$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ como en el enunciado, definamos

$$D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{D}(p_i, \varepsilon).$$

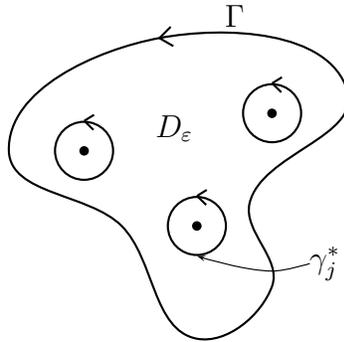


Figura 9.4: Curva cerrada que encierra circunferencias

Introduzcamos un segmento rectilíneo $L_1 \subseteq D_\varepsilon$, o en caso de ser necesario una cadena continua y finita de tales segmentos, que una el camino Γ con γ_1^* . Similarmente, sea $L_2 \subseteq D_\varepsilon$ otro segmento (o cadena) rectilíneo que una γ_1^* con γ_2^* , y así sucesivamente hasta L_{n+1} uniendo γ_n^* con Γ .

De este modo, podemos dividir D_ε en dos subdominios simplemente conexos D'_ε y D''_ε donde f es holomorfa, los cuales corresponden a regiones encerradas por los segmentos L_j y arcos de Γ y γ_j^* . Sobre ambos dominios podemos aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para f , para deducir que

$$\oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz = 0 = \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz,$$

donde $\partial D'_\varepsilon$ y $\partial D''_\varepsilon$ denotan los caminos que encierran a D'_ε y D''_ε respectivamente. En particular, la suma de estas integrales es nula, y si ambos caminos se recorren en sentido antihorario entonces las integrales en sentidos opuestos a lo largo de los segmentos L_j se cancelan mutuamente.

Luego, si denotamos por $(\gamma_j^*)^-$ el camino γ_j^* recorrido en sentido horario, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz + \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz \\ &= \oint_{\Gamma} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \oint_{(\gamma_j^*)^-} f(z)dz + \text{Integrales sobre los } L_j\text{'s} \\ &= \oint_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. ■

9.4. Ejercicios

1. Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0, z_0]} \operatorname{Re}(z)dz, \quad \int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z)dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \int_{|z|=1} \bar{z}^n dz$$

2. Pruebe que la función $z \rightarrow z \log(z)$ tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y calcule el valor de la integral

$$\int_{[0, i]} z \log(z)dz$$

3. Pruebe que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^3 + 1} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, -R+i]} \frac{z^2 \exp(z)}{z + 1} dz = 0$$

4. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario y que encierra una región $D \subseteq \mathbb{C}$. Pruebe que

$$\operatorname{Area}(D) = \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} \bar{z} dz.$$

5. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{Im}(e^{-2ix} p(x+i)) dx = 0$$

para cualquier polinomio $p(z)$ a coeficientes reales.

Indicación: Considere $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$.

9.5. Problemas

Problema 9.1. $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$ con γ la frontera del semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Problema 9.2. $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ donde γ es el cuadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i .

Problema 9.3. $\int_{\gamma} \frac{|z|}{|1-z|^2} |dz|$ donde γ es la circunferencia de radio r ($0 < r < 1$) y centro el origen.

Indicación: Pruebe previamente que si $0 \leq r < R$, se tiene:

$$\frac{1}{R^2 - 2rR \cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(nt) \right)$$

y use que $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge uniformemente a $\frac{r}{1-r}$ con $|r| < 1$ ($r \in \mathbb{C}$).

Problema 9.4. Calcule $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, siendo γ :

(a) $\gamma(t) = t^2 + it$ con $0 \leq t \leq 2$

(b) la línea poligonal que conecta los puntos 0 con $2i$, y $2i$ con $4+2i$.

Problema 9.5. Calcule $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$, siendo γ :

(a) $\gamma(t) = e^{i(\pi-t)}$ con $0 \leq t \leq \pi$

(b) $\gamma(t) = e^{it}$ con $\pi \leq t \leq 2\pi$

Problema 9.6. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$. Pruebe que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \sin(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^b e^{y^2} dy$$

Indicación: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ en un contorno rectangular adecuado.

Problema 9.7. (a) Pruebe que para $b \in]-1, 1[$ se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Integre $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

(b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln \frac{1 + b}{1 - b}$$

Problema 9.8. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa.

(a) Dado $\theta_0 \in]0, 2\pi[$, pruebe que si

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0 \quad (9.3)$$

entonces se tiene

$$e^{i\theta_0} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta_0}x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

(b) Pruebe que $f(z) = \exp(-z^2)$ satisface (9.3) para todo $\theta_0 \in]0, \pi/4[$.

(c) Sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx.$$

Indicación: $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

9.6. Resolución de Problemas

Solución Problema 9.1

La curva se compone de la semicircunferencia de radio 1 que se parametriza mediante $\gamma_1(t) = e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, y del segmento $[-1, 1]$ que se parametriza poniendo $\gamma_2(t) = t$ con $t \in [-1, 1]$ (este segmento no se considera, pues corresponde a una integral de una función impar en un intervalo simétrico respecto al origen, o sea da cero).

Luego,

$$\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt + \int_{-1}^1 |t| t dt = i \int_0^{\pi} 1 dt = \pi i$$

Solución Problema 9.2 Los cuatro “lados” de γ pueden parametrizarse poniendo:

$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = 1 + it, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (1 - t) + i, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_4(t) = (1 - t)i, \quad t \in [0, 1]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |z|^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 + t^2) i dt - \int_0^1 (1 + (1 - t)^2) dt - \int_0^1 (1 - t)^2 i dt \\ &= \int_0^1 (2t - 2 + 2ti) dt = i - 1 \end{aligned}$$

Solución Problema 9.3

Probemos en primer lugar que si $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{R^2 - 2rR \cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(nt) \right)$$

siendo la convergencia de la serie uniforme en $t \in [0, 2\pi]$. En efecto, observemos primero que

$$\frac{1}{R^2 - 2rR \cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - rR(e^{it} + e^{-it}) + r^2} = \frac{1}{(R - re^{it})(R - re^{-it})}$$

Pero si $|z| = r$, por fracciones parciales, obtenemos que :

$$\frac{1}{(R - z)(R - \bar{z})} = \frac{z}{(R - z)(Rz - r^2)} = \frac{1}{R^2 - r^2} \left(\frac{R}{R - z} + \frac{r^2}{Rz - r^2} \right)$$

por lo que poniendo $z = re^{it}$ y usando la segunda parte de la indicación, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2 - 2rR \cos t + r^2} &= \frac{1}{R^2 - r^2} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)e^{it}} + \frac{\left(\frac{r}{R}\right)e^{-it}}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)e^{-it}} \right) \\ &= \frac{1}{R^2 - r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{int} + \left(\frac{r}{R}\right)e^{-it} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-int} \right) \\ &= \frac{1}{R^2 - r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-int} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R^2 - r^2} \left(1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos(nt) \right).$$

uniformemente en $t \in [0, 2\pi]$.

Por tanto, puesto que la convergencia uniforme permite intercambiar los signos de integral y de suma, usando la indicación con $R = 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{|z|}{|1-z|^2} |dz| &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{|1-re^{it}|^2} r dt = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-r\cos(t))^2 + r^2 \sin^2(t)} = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2r\cos(t)+r^2} \\ &= \frac{r^2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nt) \right) dt = \frac{r^2}{1-r^2} \left[t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2\pi r^2}{1-r^2}. \end{aligned}$$

Solución Problema 9.4

(a) Por definición, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{2} - i \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} = 10 - \frac{8}{3}i. \end{aligned}$$

(b) Nuevamente por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^2 (-it)idt + \int_0^4 (t + 2i)dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} + \left[\frac{t^2}{2} + 2it \right]_{t=0}^{t=4} = 10 + 8i. \end{aligned}$$

Solución Problema 9.5

(a) Por definición:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}^2} = \int_0^{\pi} \frac{-ie^{i(\pi-t)}}{e^{-2i(\pi-t)}} dt = -i \int_0^{\pi} e^{3i(\pi-t)} dt = \frac{1}{3} [e^{3i(\pi-t)}]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{3}$$

(b) por definición:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}^2} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{-2it}} dt = i \int_{\pi}^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{1}{3} [e^{3it}]_{t=\pi}^{t=2\pi} = \frac{2}{3}$$

Solución Problema 9.6

Primero notamos que la función f es holomorfa en todo \mathbb{C} , lo que implica que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para cualquier curva γ cerrada y simple en \mathbb{C} .

Consideremos $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ donde

$$\gamma_1 : x; x \in [0, R], \quad \gamma_2 : R + iy; y \in [0, b], \quad \gamma_3 : x + ib; x \in [R, 0], \quad \gamma_4 : iy; y \in [b, 0].$$

Así, de la igualdad $\sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f(z)dz = 0$ se obtiene

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-(R+iy)^2} i dy - \int_0^R e^{-(x+ib)^2} dx - \int_0^b e^{y^2} i dy = 0. \quad (9.4)$$

Además

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

y por otro lado se deduce la igualdad

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} e^{-2xib} e^{b^2} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{b^2} e^{-x^2} (\cos(2xb) - i \operatorname{sen}(2bx)) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{b^2} e^{-x^2} (\cos(2xb) - i \operatorname{sen}(2bx)) dx. \end{aligned}$$

Para la parte real del segundo término de (9.4) (luego de factorizar apropiadamente) se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b e^{-R^2} e^{y^2} \cos(2yR) dy \right| &\leq \int_0^b |e^{-R^2} \cdot e^{y^2} \cos(2yR)| dy \\ &\leq e^{-R^2} \int_0^b e^{y^2} |\cos(2yR)| dy \leq e^{-R^2} \int_0^b e^{y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

y para la parte imaginaria del segundo término de (9.4), lo mismo

$$\left| \int_0^b e^{-R^2} e^{y^2} \operatorname{sen}(2yR) dy \right| \leq e^{-R^2} \int_0^b e^{y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Además se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-y^2} dy = \int_0^b e^{-y^2} dy$$

Igualando entonces, tanto la parte real como la imaginaria a 0 en (9.4), finalmente se obtiene:

Real:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\infty} e^{b^2} e^{-x^2} \cos(2xb) dx = 0,$$

concluyendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx = e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Imaginaria:

$$\int_0^{\infty} e^{b^2} e^{-x^2} \operatorname{sen}(2bx) dx - \int_0^b e^{y^2} dy = 0,$$

concluyendo que $\int_0^{\infty} e^{-y^2} \operatorname{sen}(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^b e^{y^2} dy$

Capítulo 10

Fórmula de Cauchy y primeras consecuencias

10.1. La fórmula de Cauchy

El siguiente resultado, que básicamente es una consecuencia del teorema 9.3.3 de Cauchy-Goursat, es fundamental para el desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja.

Teorema 10.1.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (10.1)$$

donde $\partial D(p, r)$ es la circunferencia de centro p y radio $r > 0$ recorrida en sentido antihorario.

Demostración. Supongamos $z_0 \neq p$ (el caso $z = p$ es análogo y se deja como ejercicio al lector). En virtud del teorema 9.3.5, que a su vez es una consecuencia del teorema 9.3.3, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene

$$\oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\partial D(p, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (10.2)$$

La primera integral del lado derecho tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$; en efecto, por la Proposición 9.2.1 se tiene

$$\left| \oint_{\partial D(p, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\varepsilon \sup_{z \in \partial D(p, \varepsilon)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|} \leq 2\pi M\varepsilon,$$

donde $M = \sup\{|f(z)|/|z - z_0| : z \in \partial D(p, \varepsilon)\}$ es finito debido a la continuidad de f y a que z_0 no pertenece al conjunto cerrado $\partial D(p, \varepsilon)$ de modo que $\exists \alpha > 0, \forall z \in \partial D(p, \varepsilon), |z - z_0| \geq \alpha$.

Por otra parte, para la segunda integral del lado derecho en (10.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) i dt. \end{aligned}$$

De la continuidad de f se deduce que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) dt = 2\pi f(z_0). \quad (10.3)$$

En efecto, dado $\eta > 0$, la continuidad de f en z_0 permite asegurar que existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| \leq \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \eta$. Luego, si $\varepsilon \leq \delta$ entonces $|z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0| = \varepsilon \leq \delta$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) dt - 2\pi f(z_0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} [f(z_0 + \varepsilon e^{it}) - f(z_0)] dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{it}) - f(z_0)| dt \\ &\leq 2\pi\eta, \end{aligned}$$

y como $\eta > 0$ es arbitrario, esto implica que se tiene (10.3).

Finalmente, observando que el lado izquierdo en (10.2) no depende de ε y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en esta igualdad se obtiene

$$\oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

lo que prueba el resultado. ■

10.2. Desarrollo en serie de Taylor

Teorema 10.2.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en un abierto Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(p, r) \subseteq \Omega$. Entonces existe una sucesión de constantes $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ tales que*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k, \quad \forall z \in D(p, r),$$

y más aún

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw,$$

donde $\partial D(p, r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

Demostración. Dado $z \in D(p, r)$, en virtud de la fórmula de Cauchy se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-p}{w-p}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-p)^k}{(w-p)^{k+1}} dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw \right) (z-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k. \end{aligned}$$

El intercambio $\int \sum = \sum \int$ se justifica como sigue

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial D} \sum_{k=0}^{\infty} (\%) - \sum_{k=0}^N \oint_{\partial D} (\%) \right| &= \left| \oint_{\partial D} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\%) \right| \\ &\leq 2\pi r \sup_{w \in \partial D} \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{f(w)(z-p)^k}{(w-p)^{k+1}} \right| \\ &\leq 2\pi r \underbrace{\sup_{w \in \partial D} |f(w)|}_M \cdot \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z-p|^k}{r^{k+1}} \\ &\leq 2\pi M \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{|z-p|}{r} \right)^k \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Esto último se tiene pues se trata de la *cola* de la serie geométrica $\sum a^k$ con $a = |z-p|/r < 1$ pues $z \in D(p, r)$.

Finalmente, la igualdad $f^{(k)}(p) = k!c_k$ es consecuencia de que la serie se puede derivar término a término y luego evaluar en $z = p$ de manera iterativa (ver el teorema 8.1.1 y el corolario 8.1.2). ■

Corolario 10.2.2. Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en un abierto Ω , y holomorfa en Ω salvo en a lo más un número finito de puntos, entonces f es holomorfa en todo Ω y, más aún, f es infinitamente derivable en Ω .

10.3. Otras consecuencias

Corolario 10.3.1 (Desigualdades de Cauchy). Sea Ω abierto, $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(p, r) \subseteq \Omega$. Si definimos

$$M_r = \sup_{\partial D(p,r)} |f(z)|$$

entonces

$$\forall k \geq 0, \quad |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k!M_r}{r^k}$$

Demostración. Del teorema 10.2.1, se deduce que

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw$$

de modo que:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(p)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{|f(w)|}{r^{k+1}} |dw| \\ &= \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{r^{k+1}} |rie^{i\theta}| d\theta \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{r^k} \int_0^{2\pi} |f(p+re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{r^k} M_r 2\pi = \frac{k!M_r}{r^k}. \end{aligned}$$

■

Corolario 10.3.2 (Teorema de Liouville). Si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función acotada entonces f constante en \mathbb{C} .

Demostración. Por hipótesis, existe una constante $M > 0$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $r > 0$, obviamente $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}$ que es la región en donde f es holomorfa. Por el corolario anterior, se tiene que para $k = 1$, $|f'(z_0)| \leq M/r$, pues $M_r = \sup_{z \in \partial D(z_0, r)} |f(z)| \leq M$. Como $r > 0$ es arbitrario, podemos hacer $r \rightarrow \infty$ para deducir que $|f'(z_0)| = 0$, y como z_0 también es arbitrario, tenemos que $f' \equiv 0$ en \mathbb{C} , de donde se sigue que f es constante. ■

Corolario 10.3.3 (Teorema de d'Alembert o Teorema Fundamental del Algebra). Si f es un polinomio no constante entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. En consecuencia, todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces.

Demostración. La demostración de este resultado mediante métodos puramente algebraicos es algo dificultosa. Sin embargo, puede deducirse con relativa facilidad a partir del teorema de Liouville.

Argumentando por contradicción, supongamos que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$ con $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Obviamente $f \in H(\mathbb{C})$ y además podemos definir $g \in H(\mathbb{C})$ mediante $g(z) = 1/f(z)$. Si g fuese acotada entonces, por el teorema de Liouville, se tendría $g \equiv C$ para alguna constante $C \in \mathbb{C}$. Pero en tal caso, f también sería constante, lo que contradice la hipótesis. Veamos ahora que efectivamente g es una función acotada bajo la condición $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$; en efecto

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} \\ &= \frac{1}{a_nz^n} \left(\frac{1}{\frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{z} + 1} \right) \end{aligned}$$

donde $b_i = a_i/a_n$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Notemos que $|g(z)| \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. En particular, $\exists r > 0$ tal que $|z| > r \Rightarrow |g(z)| \leq 1$. Para $|z| \leq r$, notemos que g es continua de modo que es acotada en el compacto $\overline{D}(0, r)$. Tomando $M = \max\{1, \sup_{z \in \overline{D}(0, r)} |g(z)|\} < \infty$ se tiene que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| \leq M$.

El resto de la demostración es algebraica. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Como f no es constante, se tiene que $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. Así, resulta que $(z - z_0)$ divide a f luego podemos escribir $f(z) = (z - z_0)f_1(z)$. Notemos que $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es necesariamente un polinomio de grado $n-1$. Si $n-1 > 0$, podemos aplicar el mismo razonamiento, para obtener un $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $f_1(z_1) = 0$. Ahora bien, $(z - z_1)$ divide a f_1 , de donde se tiene que $f_1 = (z - z_1)f_2$, y por consiguiente $f(z) = (z - z_0)(z - z_1)f_2(z)$. Repetimos el argumento n veces, hasta obtener una secuencia $\{z_i\}_{i \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$ tal que $f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})f_n(z)$. Notando que f_n es de grado 0, es decir $f_n \equiv \text{constante}$, se concluye el teorema. ■

10.4. Ejercicios

1. Pruebe que para todo $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\pi e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = \pi.$$

2. Desarrollar $f(z) = \sinh z$ en serie de Taylor en torno al punto $z = \pi i$.
3. Usando la fórmula integral de Cauchy apropiadamente, calcule

$$\oint_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$$

donde $\Gamma = \partial D(0, 3)$ es la circunferencia de centro 0 y radio 3, recorrida en sentido antihorario.

10.5. Problemas

Problema 10.1. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Problema 10.2. Sea $f \in H(\Omega \setminus \{0\}) \cap C(\Omega)$ con Ω un conjunto abierto tal que $\overline{D}(0, r) \subseteq \Omega$ para algún $r > 0$. Suponga que existe una sucesión $(z_n)_{n \geq 0} \subseteq \Omega \setminus \{0\}$ tal que $z_n \rightarrow 0$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n \geq 0$. Pruebe que $f \equiv 0$.

Problema 10.3. Encuentre el desarrollo en serie de potencias $\sum c_k z^k$ en torno a $z_0 = 0$, para la función

$$f(z) = 1/(1 - z - z^2).$$

Pruebe además que c_k es la sucesión de Fibonacci ($c_0 = c_1 = 1, c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$).

Indicación: puede servirle separar en fracciones parciales.

Problema 10.4. ¹ Demuestre que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz,$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario. Usando lo anterior, pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}.$$

Problema 10.5. ² Calcule la integral real $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

Indicaciones:

1. Para $R > 0$, sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2\}$, y sea $\Gamma = \partial D$ (el borde de D). Pruebe que $\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^4} dz = (1-i)\sqrt{2}\pi/4$. Sugerencia: Le ayudará encontrar las raíces de $z^4 + 1 = 0$.
2. Si $\Gamma_R = \{z : |z| = R, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2\}$, pruebe que $\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \rightarrow 0$ si $R \rightarrow \infty$.
3. Concluya.

10.6. Resolución de problemas

■ Solución Problema 10.5

Siguiendo las indicaciones del enunciado, calculamos las raíces de $z^4 + 1 = 0$. Las mismas

¹Control 3. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: Salomón Alarcón y Felipe Álvarez

²Control 2. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

son $\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\}$. Observamos que si $R < 1$ ninguna de las raíces pertenece al conjunto D . Si $R > 1$ sólo la raíz $e^{\frac{i\pi}{4}}$ está dentro de D (si $R = 1$ no podemos integrar la función $\frac{1}{z^4+1}$ sobre $\Gamma = \partial D$ pues la misma no estaría bien definida en el punto $e^{\frac{i\pi}{4}} \in \Gamma$). Nos interesan los valores grandes de R dado que nuestro razonamiento incluye hacer $R \rightarrow \infty$.

Factorizando $z^4 + 1$ se tiene que

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \int_{\Gamma} \frac{1}{(z - e^{\frac{3i\pi}{4}})(z - e^{\frac{5i\pi}{4}})(z - e^{\frac{7i\pi}{4}})} \frac{1}{z - e^{\frac{i\pi}{4}}} dz$$

Ahora consideramos la función $g(z) = \frac{1}{(z - e^{\frac{3i\pi}{4}})(z - e^{\frac{5i\pi}{4}})(z - e^{\frac{7i\pi}{4}})}$ que es holomorfa en un conjunto abierto Ω que incluye la curva Γ y todos los puntos que Γ rodea, (de hecho $g \in H(\mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\})$). Entonces podemos usar la fórmula de Cauchy, que nos dice que

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz = 2\pi i g(e^{\frac{i\pi}{4}}) = \frac{2\pi i}{(\sqrt{2})(\sqrt{2}(1+i))(i\sqrt{2})} = \frac{2\pi i}{2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}$$

Lo que prueba el primer punto de la indicación.

Probaremos ahora que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \right| &\leq L(\Gamma_R) \sup_{z \in \Gamma_R} \left| \frac{1}{z^4 + 1} \right| \\ &= \frac{\pi R}{2} \sup_{\theta \in [0, \pi/2]} \frac{1}{|R^4 e^{i4\theta} + 1|} = \frac{R\pi}{2(R^4 - 1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Para concluir observamos que

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \int_0^R \frac{1}{x^4 + 1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz + \int_0^R \frac{1}{y^4 + 1} (-i) dy \quad (10.4)$$

El lado izquierdo de (10.4) no depende de R y permanece igual a $\frac{\pi\sqrt{2}(1-i)}{4}$ cuando hacemos $R \rightarrow \infty$. Mientras que al tomar límite al lado derecho obtenemos

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx + 0 + \int_0^{\infty} \frac{1}{y^4 + 1} (-i) dy = (1-i) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

Lo que nos permite concluir que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Capítulo 11

Teorema de los residuos

11.1. Puntos singulares, polos y residuos

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Se dice que $p \in \mathbb{C}$ es un *punto singular aislado* de $f(z)$ si existe un radio $R > 0$ tal que $f \in H(D(p, R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p .

Ejemplo 11.1.1. El complejo $p = 0$ es un punto singular aislado de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

□

Se dice que p es un *punto singular evitable* si, junto con ser punto singular aislado, el siguiente límite existe

$$L_0(p) = \lim_{z \rightarrow p} f(z).$$

Notemos que en este caso podemos extender la definición de f a todo el disco $D(p, R)$ de la siguiente forma:

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D(p, R) \setminus \{p\}, \\ L_0(p) & \text{si } z = p. \end{cases}$$

La función \widehat{f} así definida coincide con f en $D(p, R) \setminus \{p\}$ y evidentemente es continua en todo $D(p, R)$. Como $f \in H(D(p, R) \setminus \{p\})$, por el corolario 10.2.2 se tiene $\widehat{f} \in H(\Omega)$. Esto justifica la terminología de punto singular evitable.

Ejemplo 11.1.2. El complejo $p = 0$ es un punto singular evitable de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z},$$

pues de la serie de potencias de $\operatorname{sen} z$ se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

De este modo, la función $\widehat{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

es holomorfa en todo \mathbb{C} . Por otra parte, $p = 0$ es un punto singular no evitable de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z}.$$

Se dice que $p \in \mathbb{C}$ es un *polo* de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y además existe un entero $m \geq 1$ tal que el límite

$$L_m(p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z)$$

existe y es no nulo, i.e. $L_m(p) \neq 0$. El menor $m \geq 1$ con dicha propiedad se llama *orden* del polo p . Diremos que p es un *polo simple* cuando sea un polo de orden $m = 1$.

Ejemplo 11.1.3. El complejo $p = 0$ es un polo simple de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z},$$

pues

$$L_1(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \frac{\cos z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = \cos(0) = 1.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, p un punto en Ω y supongamos que $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$.

Si p es un polo de $f(z)$ entonces p no puede ser un punto singular evitable de $f(z)$, pues en caso contrario se tendría

$$\lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m \lim_{z \rightarrow p} f(z) = 0L_0 = 0,$$

para todo entero $m \geq 1$, lo que contradice la definición de polo. Luego, un polo es una verdadera singularidad de la función en el sentido que no es posible *repararla* en p por continuidad.

Supongamos que p es un polo de $f(z)$ de orden $m \geq 1$. Si consideramos

$$g(z) = (z - p)^m f(z)$$

entonces p resulta ser un punto singular evitable de $g(z)$ y en consecuencia la función

$$\widehat{g}(z) = \begin{cases} (z - p)^m f(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \{p\}, \\ \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z) & \text{si } z = p. \end{cases}$$

es holomorfa en todo Ω .

De acuerdo al teorema 10.2.1, si $r > 0$ es tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ entonces $\widehat{g}(z)$ admite una expansión en serie de Taylor en $D(p, r)$ y en particular se tiene

$$\forall z \in D(p, r) \setminus \{p\}, \quad (z-p)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{c}_k (z-p)^k,$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{c}_k &= \frac{\widehat{g}^{(k)}(p)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{\widehat{g}(w)}{(w-p)^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k-m+1}} dw, \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene para $f(z)$ el siguiente desarrollo en serie de potencias (con potencias negativas) para todo $z \in D(p, r) \setminus \{p\}$:

$$f(z) = \frac{\widehat{c}_0}{(z-p)^m} + \frac{\widehat{c}_1}{(z-p)^{m-1}} + \dots + \frac{\widehat{c}_{m-1}}{(z-p)} + R(z), \quad (11.1)$$

donde el resto

$$R(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \widehat{c}_k (z-p)^{k-m}$$

es una función holomorfa en $D(p, r)$ por tratarse de una serie de potencias usual.

El desarrollo (11.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m}(z-p)^{-m} + \dots + c_{-1}(z-p)^{-1} + c_0 + c_1(z-p) + \dots \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-p)^k, \end{aligned}$$

donde para todo $k \geq -m$ se tiene

$$c_k = \widehat{c}_{k+m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw.$$

Esto se trata de un caso particular de lo que se conoce como expansión en *serie de Laurent* de $f(z)$ que veremos en la sección 11.4, la cual constituye una generalización de la serie de Taylor al caso de funciones con singularidades aisladas.

En el caso más general, la serie de Laurent puede admitir infinitos términos no nulos asociados a potencias negativas (en lugar de sólo un número finito como ocurre en el caso de un polo), en cuyo caso decimos que se trata de una *singularidad esencial* de $f(z)$. En este apunte, no abordaremos mayormente el caso de singularidades esenciales.

Como veremos en la siguiente sección, el coeficiente \widehat{c}_{m-1} (o equivalentemente, el coeficiente c_{-1}) en el desarrollo de Laurent (11.1) de $f(z)$ en torno a p juega un rol muy importante en la teoría de funciones de variable compleja. A este coeficiente se le llama *residuo de f en p* y se denota por $\text{Res}(f, p)$. Tenemos que

$$\text{Res}(f, p) = \frac{\widehat{g}^{(m-1)}(p)}{(m-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} f(w)dw.$$

Una expresión para $\text{Res}(f, p)$ que es muy útil en cálculos específicos se obtiene al notar que todas las derivadas de \widehat{g} son continuas de modo tal que, recordando que

$$\widehat{g}(z) = (z-p)^m f(z), \quad z \neq p,$$

se tiene

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p)^m f(z)] \quad (11.2)$$

donde $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$ denota la derivada de orden $m-1$.

11.2. El teorema de los residuos

Sea $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Supongamos primero que p es un punto singular evitable de f , de modo que la extensión \widehat{f} de f a todo Ω por continuidad satisface $\widehat{f} \in H(\Omega)$. Si Ω es simplemente conexo y $\Gamma \subseteq \Omega \setminus \{p\}$ es un camino cerrado simple entonces podemos aplicar el teorema 9.3.3 de Cauchy-Goursat a \widehat{f} para deducir que

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0, \quad (11.3)$$

donde hemos usado que \widehat{f} coincide con f en $\Omega \setminus \{p\}$ y que el camino Γ no pasa por p .

Supongamos ahora que p es un polo de f de orden m . Como en este caso no es posible extender f a todo Ω de modo que la extensión sea continua, nada asegura que (11.3) sea válido. De hecho, si suponemos que el camino cerrado simple Γ está contenido en $D(p, r) \setminus \{p\}$ con $r > 0$ de modo tal que el desarrollo (11.1) es válido para todo $z \in D(p, r) \setminus \{p\}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z)dz &= \oint_{\Gamma} \left[\frac{\widehat{c}_0}{(z-p)^m} + \dots + \frac{\widehat{c}_{m-1}}{(z-p)} + R(z) \right] dz \\ &= \widehat{c}_{m-1} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z-p} dz \\ &= \text{Res}(f, p) 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma}(p) \\ &= 2\pi i \text{Res}(f, p), \end{aligned}$$

siempre que Γ se recorra en sentido antihorario. Esta propiedad explica el nombre de *residuo* dado al coeficiente \widehat{c}_{m-1} , y puede extenderse a situaciones más generales. Introduzcamos primero la siguiente definición.

Definición 11.2.1. Una función f se dice meromorfa en un abierto Ω si existe un conjunto $P \subseteq \Omega$ finito o numerable tal que

- (1) $f \in H(\Omega \setminus P)$.
- (2) f tiene un polo en cada punto $p \in P$.
- (3) P no posee puntos de acumulación.

Teorema 11.2.2 (Teorema de los residuos de Cauchy). Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y sea P el conjunto de todos sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ y tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f , digamos $P \cap D = \{p_1, \dots, p_n\}$ y más aún

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, p_j). \quad (11.4)$$

Demostración. Comencemos por notar que si bien P puede ser infinito, sabemos que D es acotado, y como P no tiene puntos de acumulación en Ω se sigue que $P \cap D$ es finito. Ahora bien, de acuerdo con el teorema 9.3.5, para $\varepsilon > 0$ pequeño se tiene

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z) dz, \quad \gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

En torno a cada polo p_j la función f admite un desarrollo del tipo (11.1) de modo tal que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_j} f(z) dz &= \oint_{\gamma_j^*} \left[c_{-m_j}^j (z - p_j)^{-m_j} + \dots + c_{-1}^j (z - p_j)^{-1} + R_j(z) \right] dz \\ &= c_{-1}^j \oint_{\gamma_j^*} \frac{1}{z - p_j} dz \\ &= 2\pi i \text{Res}(f, p_j), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

11.3. Ejemplos

Una primera regla de cálculo sencilla para evaluar el residuo de una función de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

que tiene un **polo simple** en p , donde $g(p) \neq 0$ y $h(p) = 0$ consiste en la fórmula

$$\text{Res} \left(\frac{g(z)}{h(z)}, p \right) = \frac{g(p)}{h'(p)}. \quad (11.5)$$

La demostración de (11.5) es directa de la definición de residuo con orden $m = 1$ por ser p un polo simple.

Ejemplo 11.3.1. Calcular:

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Solución Comencemos por notar que los polos de

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

están dados por

$$p_1 = i, \quad p_2 = -i,$$

y ambos son polos simples y están encerrados por $\partial D(0,2)$.

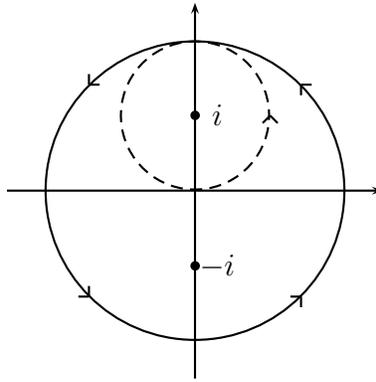


Figura 11.1: Circunferencia centrada en el origen

Los residuos correspondientes son:

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i},$$

y

$$\text{Res}(f, -i) = -\frac{1}{2i}.$$

Luego

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right] = 0.$$

Por otra parte, si consideramos la circunferencia centrada i y de radio 1, entonces

$$\oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} \right] = \pi.$$

□

Antes de ver otro ejemplo, demostremos el siguiente resultado que es bastante útil para el cálculo de polos y residuos.

Proposición 11.3.2 (Regla de l'Hôpital). Sean $f, g \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $n \geq 1$ tales que

$$g(p) = \dots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^{(n)}(p).$$

Entonces

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \text{no existe} & \text{si } f^{(k)}(p) \neq 0 \text{ para algún } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \\ \frac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & \text{si } f^{(k)}(p) = 0 \text{ para todo } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el desarrollo de Taylor de g en torno a p

$$g(z) = \sum_{k \geq n} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^k = \frac{g^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n + \frac{g^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} (z-p)^{n+1} + \dots$$

Luego

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^{k-n}}{\frac{g^{(n)}(p)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} (z-p) + \dots}$$

El denominador tiende hacia $\frac{g^{(n)}(p)}{n!}$. El numerador sólo converge cuando $f^{(k)}(p) = 0$ para todo $k < n$, y en tal caso tiende a $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}$, lo que permite concluir. ■

Ejemplo 11.3.3. Evaluar

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z \operatorname{sen} z},$$

donde Γ es el camino de la figura 11.2.

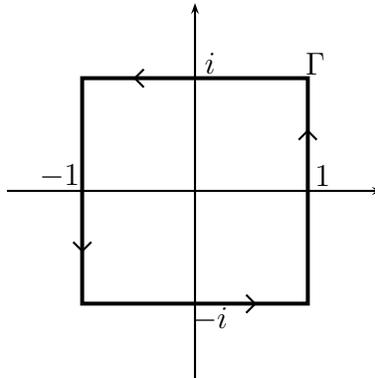


Figura 11.2: Cuadrado centrado en el origen

Solución La función

$$f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z}$$

tiene como candidatos a ser polos todos los puntos del tipo $p_k = k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$.

Si $k = 0$ entonces $p_0 = 0$ es polo de orden 2; en efecto

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos z} = 1,$$

mientras que el limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

no existe. Si $k \neq 0$ entonces p_k no pertenece a la región encerrada por Γ , y por lo tanto estos puntos no son relevantes para el cálculo de la integral.

Residuo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d^1}{dz^1} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\operatorname{sen} z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z - z \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - \cos z + z \operatorname{sen} z}{2 \operatorname{sen} z \cos z} = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z \operatorname{sen} z} = 0.$$

Notemos que en este caso el residuo resultó ser 0, lo que no es posible cuando el polo es simple. □

Ejemplo 11.3.4. Calcular

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3}{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2} dz,$$

donde Γ es el camino de la figura 11.3.

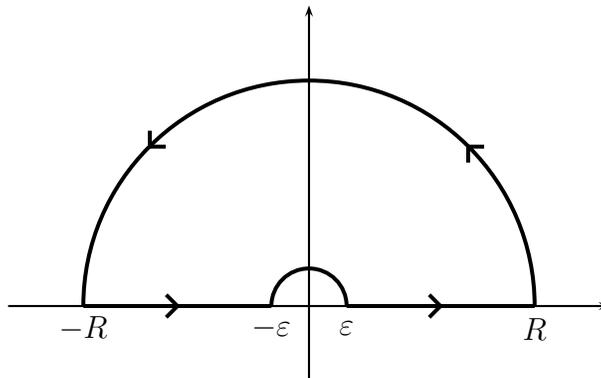


Figura 11.3: Camino que evita al origen

Solución Para determinar los polos de la función

$$f(z) = \frac{z^3}{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2},$$

veamos donde se anula el denominador:

$$\begin{aligned} e^{3iz} - 3 \underbrace{e^{iz}}_w + 2 = 0 &\Leftrightarrow w^3 - 3w + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (w - 1)^2(w + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow w = 1 \text{ o bien } w = -2 \\ &\Leftrightarrow iz = \log(1) \text{ o bien } iz = \log(-2) = \ln 2 + i\pi \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ o bien } z = \pi - i \ln 2. \end{aligned}$$

Como ninguno de estos puntos está encerrado por Γ , entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Si en lugar del camino anterior se considera la circunferencia centrada en el origen y de radio $R > 0$ suficientemente grande, entonces ambos puntos son relevantes.

• $p = 0$: desarrollando las exponenciales en serie de potencias se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{(1 + (3iz) + \frac{(3iz)^2}{2!} + \frac{(3iz)^3}{3!} + \dots) - 3(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots) + 2} \\ &= \frac{z^3}{(-\frac{9}{2}z^2 - \frac{27}{6}iz^3 + \dots) - (-\frac{3}{2}z^2 - \frac{iz^3}{6} + \dots)} \\ &= \frac{z^3}{-3z^2 + o(z^2)} \rightarrow 0 \Rightarrow p = 0 \text{ no es polo.} \end{aligned}$$

• $p = \pi - i \ln 2$:

$$f(z) = \frac{z^3}{(e^{iz} - 1)^2(e^{iz} + 2)} = \frac{z^3}{(e^{iz} - 1)^2} \frac{1}{e^{iz} - e^{ip}},$$

luego

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{z^3}{(e^{iz} - 1)^2} \frac{z - p}{e^{iz} - e^{ip}} = \frac{p^3}{(e^{ip} - 1)^2} \frac{1}{ie^{ip}} = \frac{p^3}{9} \frac{1}{i(-2)} = \frac{i(\pi - i \ln 2)^3}{18} \neq 0,$$

de modo que $p = \pi - i \ln 2$ es un polo simple. En este caso, el residuo coincide con el límite que acabamos de calcular, es decir

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)f(z) = \frac{i(\pi - i \ln 2)^3}{18},$$

y en consecuencia

$$\oint_{\partial D(0, R)} f(z) dz = -\frac{\pi}{9} (\pi - i \ln 2)^3.$$

□

Una consecuencia interesante del teorema de los residuos es la siguiente:

Proposición 11.3.5. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y Γ una curva simple, cerrada y recorrida en sentido antihorario la cual encierra una región $D \subseteq \Omega$. Si f tiene un número finito de ceros al interior de D y no tiene ceros en Γ entonces

$$\text{Ind}_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{número total de ceros de } f \text{ en } D,$$

donde en este número se incluye la multiplicidad de los ceros.

Demostración. Tenemos que $f(\Gamma)$ es una curva cerrada que por hipótesis no pasa por 0, y que si Γ está parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ entonces $f(\Gamma)$ lo está por $f \circ \gamma$. Luego,

$$\text{Ind}_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\Gamma)} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Por otra parte, definamos

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

y sea p un cero de f . Como f es holomorfa, podemos encontrar $r > 0$, $m \geq 1$ y una función $f_0(z)$ holomorfa en $D(p, r)$ tales que para todo $z \in D(p, r)$, $f(z) = (z - p)^m f_0(z)$ con $f_0(p) \neq 0$ (m es la multiplicidad de p). De este modo, para $z \in D(p, r)$ podemos escribir

$$g(z) = \frac{m(z - p)^{m-1} f_0(z) + (z - p)^m f_0'(z)}{(z - p)^m f_0(z)} = \frac{m}{z - p} + \frac{f_0'(z)}{f_0(z)},$$

y en consecuencia p es un polo simple de g y más aún $\text{Res}(g, p) = m$. Repitiendo esto para cada uno de los ceros de f , deducimos del teorema de los residuos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} g(z) dz = \sum_{p \in D} m_p = \text{número total de ceros de } f \text{ en } D.$$

■

11.4. Series de Laurent

Una serie de Laurent es una serie de la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k \tag{11.6}$$

donde $a \in \mathbb{C}$ es un punto dado y $(c_k)_k; k \in \mathbb{Z}$ es una familia de números complejos indexada por los enteros. Observemos que a diferencia de una serie de potencias, en la serie de Laurent intervienen tanto potencias positivas como negativas de $(z - a)$.

Definamos la parte *positiva* y *negativa* de (11.6) mediante

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad N(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k.$$

Observemos que $P(z)$ es una serie de potencias y que $N(z)$ se puede reescribir de la siguiente manera

$$N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}((z-a)^{-1})^k,$$

que es una serie de potencias en la variable $(z-a)^{-1}$.

Dado $z \neq a$ diremos que la serie de Laurent (11.6) converge si $P(z)$ y $N(z)$ convergen.

Teorema 11.4.1. Sean

$$R_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|},$$

y

$$R_2 = 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

con la convención $1/0 = \infty$.

Si $R_1 < R_2$ entonces $L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ converge para todo z en la región anular

$$A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$$

y define una función holomorfa en A .

Demostración. Dado $z \in \mathbb{C}$ recordemos que $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ converge si $|z-a| < R_2$ y diverge si $|z-a| > R_2$. Además, si $R_2 > 0$ entonces $P(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R_2\}$.

Por otro lado observemos que dado $w \in \mathbb{C}$, $g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}w^k$ converge si

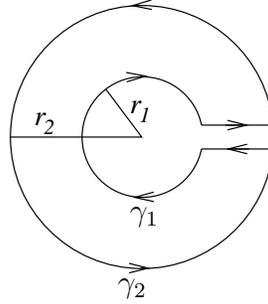
$$|w| < 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$$

mientras que diverge si $|w| > 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$. Tomando $w = (z-a)^{-1}$ vemos que $N(z)$ converge si $|z-a| > R_1$ y diverge si $|z-a| < R_1$. En síntesis, la serie de Laurent $L(z)$ converge si $R_1 < |z-a| < R_2$ y diverge si $|z-a| < R_1$ o $|z-a| > R_2$.

Para concluir notemos que si $R_1 < \infty$ entonces $N(z)$ es una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > R_1\}$, ya que es la composición de g con la función $z \mapsto (z-a)^{-1}$. Luego $L(z)$ es holomorfa en A . ■

Observación 11.4.2. Si $R_1 \geq R_2$ no se puede garantizar la convergencia de la serie de Laurent para ningún $z \in \mathbb{C}$.

Como en el caso de las series de potencias, si $|z-a| = R_1$ o $|z-a| = R_2$ puede o no haber convergencia de la serie de Laurent, lo que dependerá de cada caso particular.

Figura 11.4: círculos de radio $r_1 < r_2$

Teorema 11.4.3. Sean $a \in \mathbb{C}$ un punto dado, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ y A la región definida por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}.$$

Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces existen constantes $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tales que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad \forall z \in A.$$

Más aún,

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw,$$

para cualquier r tal que $R_1 < r < R_2$, donde $\partial D(a,r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

Demostración. Primero observemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw$$

no depende de r . En efecto, sean $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ y usemos la notación $\gamma_1 = \partial D(a, r_1)$, $\gamma_2 = \partial D(a, r_2)$, parametrizadas en sentido antihorario. Entonces por el teorema de Cauchy aplicado a la función $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}$, que es holomorfa en A , y al camino de la figura:

se deduce que

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw = \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw.$$

Consideremos ahora un punto $z \in A$ cualquiera y escojamos r_1 y r_2 de modo que

$$R_1 < r_1 < |z - a| < r_2 < R_2.$$

Por la fórmula de Cauchy en el camino de la figura (11.4) obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

El primer término del lado derecho en la fórmula anterior es igual a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} dw \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \right) (z-a)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,
 \end{aligned}$$

donde el intercambio $\int \sum = \sum \int$ se justifica exactamente del mismo modo que en la demostración del Teorema 10.2.1, utilizando que para $w \in \gamma_2$

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1.$$

Para la segunda integral tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w) \cdot \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}} dw \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}} dw \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(w-a)^{k-1}}{(z-a)^k} dw \\
 &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{-k+1}} dw \right) (z-a)^{-k} \\
 &= -\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-a)^k,
 \end{aligned}$$

En esta ocasión el intercambio $\int \sum = \sum \int$ se justifica como sigue

$$\begin{aligned}
 \left| \oint_{\gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} (\%) - \sum_{k=0}^N \oint_{\gamma_1} (\%) \right| &= \left| \oint_{\gamma_1} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\%) \right| \\
 &\leq 2\pi r_1 \sup_{w \in \gamma_1} \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{f(w)(w-a)^{k-1}}{(z-a)^k} \right| \\
 &\leq 2\pi r_1 \cdot \sup_{w \in \gamma_1} |f(w)| \cdot \sum_{N+1}^{\infty} \frac{r_1^{k-1}}{|z-a|^k} \\
 &\leq 2\pi M \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{|z-a|} \right)^k,
 \end{aligned}$$

donde $M = \sup_{w \in \gamma_1} |f(w)|$. Notemos que

$$\sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{|z-a|} \right)^k \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty,$$

ya que se trata de una serie geométrica $\sum a^k$ con $a = r_1/|z-a| < 1$. ■

Observación 11.4.4. *El teorema anterior afirma que f se puede representar por una serie de Laurent en el anillo A . Notemos que la fórmula explícita para los coeficientes en términos de f garantiza que esta representación es única.*

Revisemos el concepto de singularidad aislada de una función $f(z)$. Supongamos $p \in \mathbb{C}$ es un punto singular aislado de $f(z)$, es decir, existe un radio $R > 0$ tal que $f \in H(D(p, R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p . Gracias al Teorema 11.4.3 deducimos que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-p)^k, \quad \forall z \in D(p, R) \setminus \{p\},$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$. Podemos afirmar entonces que:

- i) si $c_k = 0$ para todo $k < 0$ entonces p es un punto singular evitable,
- ii) si existe $m \geq 1$ tal que $c_k = 0$ para todo $k < -m$ pero $c_{-m} \neq 0$ entonces p es un polo de orden m ,
- iii) en caso contrario el número de índices $k < 0$ para los cuales $c_k \neq 0$ es infinito y a p se le llama una *singularidad esencial*.

El siguiente es un ejemplo de una singularidad esencial.

Ejemplo 11.4.5. Consideremos $f(z) = e^{1/z}$, $z \in A$ donde $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$. Notemos que para $z \neq 0$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!}$$

Entonces la serie de Laurent de f en torno a 0 es

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

donde

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \frac{1}{(-k)!} & \text{si } k \leq 0. \end{cases}$$

Observación 11.4.6. *Los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de una función holomorfa dependen crucialmente de cual es el anillo con respecto al cual se hace la expansión. Incluso anillos distintos pero centrados en el mismo punto producen series de Laurent diferentes.*

Ejemplo 11.4.7. Sea $f(z) = \frac{1}{z-i}$ y encontremos su serie de Laurent en los anillos $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\}$ y $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > \sqrt{2}\}$.

Primero observemos que efectivamente f es holomorfa en ambos anillos. Si $|z-1| < \sqrt{2}$ utilizando la serie geométrica obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z-1+1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{\frac{z-1}{1-i} + 1} \\ &= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-1}{i-1}} \\ &= \frac{1}{1-i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i-1}\right)^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{(i-1)^{k+1}}, \end{aligned}$$

y la serie converge si $|\frac{z-1}{i-1}| < 1$, es decir si $|z-1| < \sqrt{2}$. Esta es la serie de Laurent de f en A_1 .

Si $|z-1| > \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z-1+1-i} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-i}{z-1}} \\ &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i-1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i-1}{z-1}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-1)^k}{(z-1)^{k+1}}, \end{aligned}$$

lo que corresponde a la serie de Laurent de f en A_2 .

11.5. Ejercicios

1. Probar que si $f(z) = (e^{kz} - 1)/z$ cuando $z \neq 0$ y $f(0) = k$ entonces $f \in H(\mathbb{C})$.
2. Suponga que f y g tienen polos de orden m y n respectivamente en z_0 . ¿Que puede decirse sobre las singularidades de $f+g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ en z_0 ?
3. Calcule las singularidades de las siguientes funciones:

$$(i) \frac{1}{z^4+z^2}, \quad (ii) \cotanz, \quad (iii) \operatorname{cosec}z, \quad (iv) \frac{\exp(\frac{1}{z^2})}{z-1}.$$

4. Determine los cinco primeros términos de la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$$

en torno a $z_0 = 0$.

5. Explique por qué el residuo en un polo simple no puede ser 0.
 6. Sea $p \in \mathbb{C}$ un polo de $g(z)$ y $h(z)$ y considere $f(z) = g(z) + h(z)$. Pruebe que

$$\operatorname{Res}(f, p) = \operatorname{Res}(g, p) + \operatorname{Res}(h, p).$$

7. Calcular

$$\oint_{\gamma^*} f(z) dz$$

con $\gamma(\theta) = e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ para:

- a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ (Resp.: 0).
 b) $f(z) = \frac{(1-e^{2z})}{z^4}$ (Resp.: $\frac{8\pi i}{3}$).
 c) $f(z) = \frac{e^z}{2(z-1)^2}$ (Resp.: $-\pi i e$).
 d) $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^4)}$ (Resp.: $-\frac{\pi i}{2}$).
8. Encontrar la serie de Laurent de la función indicada en el anillo indicado:
- a) $\frac{1}{z^2+9}$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| < 5\}$,
 b) $\frac{1}{z^2+9}$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| > 5\}$,
 c) $e^z + e^{1/z}$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$.
9. Desarrolle cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent convergente para la región $0 \leq |z - z_0| < R$, y determine la región precisa de convergencia.
- (i) $f(z) = \cosh(2z)/z$, $z_0 = 0$, (ii) $f(z) = \frac{8-2z}{4z-z^3}$, $z_0 = 0$, (iii) $f(z) = z \cos(1/z)$, $z_0 = 0$,
 (iv) $f(z) = z^{-5}e^{1/z^2}$, $z_0 = 0$, (v) $f(z) = \cos(z)/(z-\pi)^3$, $z_0 = \pi$,
 (vi) $f(z) = \frac{z^4}{z+2i}$, $z_0 = -2i$, (vii) $f(z) = \operatorname{sen}(z)/(z-\frac{1}{4}\pi)^3$, $z_0 = \pi/4$.
10. Muestre que si f es holomorfa en $z \neq 0$ y $f(-z) = -f(z)$ entonces todos los términos pares en su expansión de Laurent sobre $z = 0$ son iguales a cero.
11. Encuentre la expansión en serie de Laurent de:
- (i) $\frac{1}{z^4+z^2}$, sobre $z = 0$, (ii) $\frac{\exp(1/z^2)}{z-1}$, sobre $z = 0$, (iii) $\frac{1}{z^2-4}$, sobre $z = 2$.
12. Calcular el desarrollo en series de Laurent en la región señalada.

a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en:

(i) $0 < |z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 2$ (iii) $|z| > 2$.

b) $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ en $a = 0$. Cuál es el radio de convergencia?

c) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ en $a = 0$.

$$d) f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)} \text{ en:}$$

$$(i) \quad 0 < |z| < 1 \quad (ii) \quad 1 < |z|.$$

$$e) f(z) = \frac{1}{z^2 + z^3} \text{ en } a = 0.$$

$$f) f(z) = \left(\frac{1}{1-z} \right)^3 \text{ en:}$$

$$(i) \quad |z| < 1 \quad (ii) \quad 1 < |z| \quad (iii) \quad |z+1| < 2 \quad (iv) \quad 0 < |z-1| < \infty.$$

13. Clasifique las singularidades de las siguientes funciones. Señale cuáles son singularidades aisladas, y de éstas indique los polos, determine el orden y calcule el residuo en cada uno.

$$a) f(z) = \frac{z^2}{(z^4 + 16)^2}.$$

$$b) f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-1}$$

$$c) f(z) = \frac{z}{e^z - z + 1}.$$

$$d) f(z) = \frac{1}{z^2(\operatorname{sen} z)}$$

$$e) f(z) = \frac{1}{\cos(1/z)}.$$

$$f) f(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{\operatorname{sen}^2(z)}.$$

11.6. Problemas

Problema 11.1. Considere una función de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

y asuma que $f(z)$ tiene un polo en $p \in \mathbb{C}$ con $g(z)$ y $h(z)$ funciones holomorfas en una vecindad de p . Suponga que

$$g(p) \neq 0, h(p) = h'(p) = 0, h''(p) \neq 0.$$

Verifique que necesariamente $f(z)$ tiene un polo de orden dos en p y pruebe que

$$\operatorname{Res}(f, p) = \frac{2g'(p)}{h''(p)} - \frac{2g'(p)h'''(p)}{3h''(p)^2}.$$

Problema 11.2. Encontrar el desarrollo en serie de Taylor ó de Laurent con centro 0, y determinar las regiones donde éstas convergen, para las siguientes funciones:

$$(i) f(z) = z^{-5} \operatorname{sen} z, \quad (ii) f(z) = z^2 e^{1/z}, \quad (iii) f(z) = 1/(z^3 - z^4), \quad (iv) f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}.$$

Compare las regiones donde estas series convergen con las regiones que se obtienen a partir de los distintos teoremas de convergencia de series vistos en clases.

Problema 11.3. Calcule $\int_0^{2\pi} \cos(nx)/[1 + a^2 - 2a \cos(x)] dx$ con $a \in (0, 1)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Indicación: integre la función $f(z) = [z^n + 1/z^n][\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-1/a}]$ sobre el círculo unitario.

Problema 11.4. Encontrar la serie de Taylor o la serie de Laurent de la función $f(z) = 1/(1 - z^2)$ en la región

$$(i) 0 \leq |z| < 1, \quad (ii) |z| > 1, \quad (iii) 0 \leq |z - 1| < 2.$$

Problema 11.5.

Encuentre la serie de Laurent de las funciones

$$(i) f(z) = \frac{1}{(z^2+3)^2/(z)}$$

$$(ii) f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} \text{ para } 0 < |z| < 1 \text{ y } |z - 1| < 1.$$

Problema 11.6. Encontrar el desarrollo en serie de Taylor ó de Laurent con centro 0, y determinar las regiones donde éstas convergen, para las siguientes funciones:

$$(i) f(z) = z^{-5} \cos z, \quad (ii) f(z) = ze^{1/z^2}, \quad (iii) f(z) = 1/(z^3 - z^4).$$

Problema 11.7. (i) Sea $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$. Indique donde f es holomorfa encuentre sus polos y determine sus ordenes correspondientes.

(ii) Calcule los residuos de los polos de f .

(iii) Considere el borde del cuadrado C_N de vértices $(N + \frac{1}{2})(-1-i)$, $(N + \frac{1}{2})(1-i)$, $(N + \frac{1}{2})(1+i)$ y $(N + \frac{1}{2})(-1+i)$, con $N \in \mathbb{N}$. Calcule $\oint_{C_N} f(z)dz$ y concluya el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Problema 11.8. ¹

Considere la función de variable compleja $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z - z_1)^2(z - z_2)^2}$, donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son dos números complejos, distintos y no nulos.

(i) Identifique los polos de f con sus respectivos órdenes. Pruebe que

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{1}{z_1^2 z_2^2}, \quad \text{Res}(f; z_1) = \frac{e^{iz_1}}{z_1(z_1 - z_2)^2} \left(i - \frac{3z_1 - z_2}{z_1(z_1 - z_2)} \right).$$

(ii) Considere los valores $z_1 = 1$ y $z_2 = -5$, y sea Γ_R la circunferencia de radio R , centrada en el origen y con orientación positiva. Calcule la integral $\oint_{\Gamma_R} f(z)dz$ para $R = 1/2$ y $R = 2$.

Problema 11.9. (a) Calcule la expresión en Serie de Potencia de $\text{Log}(1 - z)$.

(b) Encuentre la Serie de Laurent de $\text{Log}(\frac{z(2-z)}{1-z})$ e indique el anillo de validez

¹Examen. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

Problema 11.10. ²

Sea f una función meromorfa en la región D (es decir, f es analítica en D , excepto en un número finito de polos). Sea Γ una curva simple, cerrada, regular y orientada en sentido anti-horario que no intersecta polos ni ceros de f . Denotemos:

C = número de ceros de f al interior de Γ , contados según multiplicidad.

P = número de polos de f al interior de Γ , contados según su orden.

(es decir, un polo -o un cero - de orden m cuenta m veces.)

Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = C - P$$

Para esto, probar cada uno de los siguientes puntos:

1. Si $p \in D$ es un cero de orden k de f entonces p es polo simple (i.e. de orden 1) de f'/f , con residuo k .
2. Si $p \in D$ es polo de orden k de f entonces p es polo simple de f'/f , con residuo $-k$.
Indicación: Para cada p , factorice $f(z)$ y represente $f'(z)/f(z)$ de manera adecuada.
3. Muestre que f'/f no tiene ningún otro polo además de los puntos mencionados en a) y en b), y concluya.

Problema 11.11. ³ Calcule el desarrollo de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z^2 + z^3}$ en cada uno de los anillos:

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$

b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$

Problema 11.12. Sea f analítica en Ω , con $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\} \subset \Omega$. Supongamos que $f(z)$ tiene un sólo cero z_0 en $D(a, R)$. Demuestre que

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, R)} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

Indicación: Considere $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$.

Problema 11.13. Sea f una función entera tal que $f(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \infty$. Pruebe que f es un polinomio.

Indicación: Muestre que $f(1/z)$ tiene un polo de orden finito en $z = 0$.

Problema 11.14. Sean g y h analíticas en z_0 tales que $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = h'(z_0) = h''(z_0) = 0$ y $h'''(z_0) \neq 0$. Demuestre que g/h tiene un polo de segundo orden en z_0 , con

$$\text{Res} \left(\frac{g}{h}, z_0 \right) = \frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3g'(z_0)h^{(iv)}}{2(h'''(z_0))^2}$$

²Control 3. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

³Control 3. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

Problema 11.15. ⁴ Sea $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y sea f una función holomorfa en $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ tal que

$$\int_{\Gamma} z^n f(z) dz = 0$$

para todo $n \geq 0$. Pruebe que $z = 0$ es una singularidad evitable de f .

Hint: Considere el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en A y el teorema de los residuos.

11.7. Resolución de problemas

■ Solución Problema 11.4

(i) Notemos que para $0 \leq |z| < 1$ se cumple que la serie $\sum z^k$ es convergente y $\sum z^k = \frac{1}{1-z}$ por lo tanto la serie de Taylor en $0 \leq |z| < 1$ corresponde a $\sum z^{2k}$.

(ii) Para $|z| > 1$, $f(z)$ puede ser escrita de modo equivalente como $f(z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{(1-\frac{1}{z^2})}$. Análogamente al ítem anterior la serie $\sum (\frac{1}{z^2})^k$ es convergente para $|z| > 1$ y se cumple $\sum (\frac{1}{z^2})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}$. Por lo tanto la serie de Laurent de f para $|z| > 1$ está dada por

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{2k}} = -\sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{2(k+1)}}$$

(iii) Finalmente notemos que $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)}$. La función $\frac{1}{(1+z)} = \frac{1}{(2+(z-1))}$ puede ser expresada en serie de Laurent en torno a al punto $z_0 = 1$ como

$$\frac{1}{(1+z)} = \frac{1}{(2+(z-1))} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{2^k}$$

esta serie es convergente en $|z-1| < 2$. Concluimos entonces que la serie de Laurent de f para $|z-1| < 2$ está dada por

$$f(z) = \frac{1}{2(1-z)} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(z-1)^k}{2^k} = -\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(z-1)^{k-1}}{2^{k+1}} = \sum_{k \geq -1} (-1)^k \frac{(z-1)^k}{2^{k+2}}$$

■ Solución Problema 11.5

(i) Desarrollando el numerador queda

$$f(z) = (z^4 + 6z^2 + 9)/z = z^3 + 6z + \frac{9}{z}$$

que corresponde a la expresión en serie de Laurent.

⁴Control 3. Otoño 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

(ii) Si $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} \sum z^k = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \end{aligned}$$

Si $|z-1| < 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z^2} \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{(z-1+1)^2} \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z} \right) \\ &= -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-(1-z)} \right) = -\frac{d}{dz} \sum_{k \geq 0} (1-z)^k \\ &= -\frac{d}{dz} \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z-1)^k = -\sum_{k \geq 0} (-1)^k k (z-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{k \geq 0} (-1)^k k (z-1)^{k-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k (z-1)^{k-2} = \sum_{k \geq -2} (-1)^k (k+2) (z-1)^k$$

■ Solución Problema 11.6

Recordemos que dada una serie de Laurent

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

los radios de convergencia son de la forma:

$$R_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|},$$

y

$$R_2 = 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Si $R_1 < R_2$ entonces $L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$ converge para todo z en la región anular

$$A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}.$$

(i) Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\cos z}{z^5} &= \frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \\ \frac{\cos z}{z^5} &= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z} - \frac{z}{6!} + \frac{z^3}{8!} - \frac{z^5}{10!} + \dots \right)\end{aligned}$$

Claramente se tiene que $R_1 = 0$ y $R_2 = \infty$, luego, $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) Tenemos que

$$\begin{aligned}z \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) &= z \left(1 + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \dots \right) \\ &= z + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^5} + \dots\end{aligned}$$

Luego se deduce que $R_2 = \infty$ y $R_1 = 0$.

(iii) Hay 2 casos, si $|z| < 1$ o $|z| > 1$. Si $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3 - z^4} &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z} \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-3} \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots\end{aligned}$$

donde $R_1 = 0$ y $R_2 = 1$, lo que implica que $A = D(0, 1) \setminus \{0\}$.

Para $|z| > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3 - z^4} &= \frac{1}{z^4} \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{1}{z^4} \frac{-1}{1 - \frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z^4} \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \right) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+4}} \\ &= -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \dots\end{aligned}$$

donde $R_1 = 1$ y $R_2 = \infty$, con $A = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$.

■ Solución Problema 11.7

(i) Para $f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$, buscamos donde $\sin(\pi z) = 0$, i.e. $\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = 0$.

Esto sucede si $e^{i\pi z} = e^{-i\pi z}$ entonces $|e^{2i\pi z}| = 1$. Si $z = x + iy$ esto quiere decir que $|e^{2\pi i(x+iy)}| = |e^{2\pi ix}| \cdot |e^{-2\pi y}| = 1$.

Si $y \neq 0$, no se cumple la igualdad, por lo que necesariamente $I_m(z) = 0$ para todo z que es raíz.

Por otro lado $e^{2\pi ix} = 0$ si y sólo si $x \in \mathbb{Z}$, por lo que $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Luego, los polos son los enteros, todos de orden 1, excepto $z = 0$, que posee multiplicidad 3.

- (ii) Como son funciones (no polinomios), vemos el límite de $(z - p_0)^\alpha \cdot f(z)$, donde p_0 es un polo de multiplicidad α .

Para $z = 0$ se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} (z - 0)^3 = \lim_{z \rightarrow 0} \pi z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z},$$

pero $\lim_{z \rightarrow 0} \cos \pi z = 1$ y

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z - \sin 0}{z - 0} = \frac{d}{dz} \sin(\pi z) \Big|_{z=0} = \pi \cos \pi z \Big|_{z=0} = \pi,$$

obteniendo

$$\lim_{z \rightarrow 0} \pi z \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = 1 = z^3 f(z) \Big|_{z=0}$$

Para $p_0 = n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\lim_{z \rightarrow n} f(\pi z)(z - n) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin \pi z} (z - n) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos \pi z}{z^2} \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi(z - n)}{\sin(\pi z)},$$

pues ambos límites existen. Pero $\sin(\pi(z - n)) = \sin(\pi z) \cos(\pi n) + \cos(\pi z) \sin(\pi n) = (-1)^n \sin(\pi z)$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow n} f(\pi z)(z - n) &= \left[\frac{\cos \pi n}{n^2} \right] \cdot \left[\lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi(z - n) \cdot (-1)^n}{\sin(\pi(z - n))} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n \left[\lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi(z - n)}{\sin(\pi(z - n))} \right] = \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, n) &= \frac{1}{n^2}, \\ \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (f(z) \cdot z^3) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\pi \cotg(\pi z)}{z^2} z^3 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (\cotg(\pi z) - \text{cosec}^2(\pi z) \cdot \pi \cdot z) \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow 0} [-2 \text{cosec}^2(\pi z) \cdot \pi + 2 \text{cosec}^2(\pi z) \cotg(\pi z) \pi^2 z] \\ &= \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi \cos(\pi z) \cdot z}{\sin^3(\pi z)} - \frac{1}{\sin^2(\pi z)} \right] \\ &= \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi z \cos \pi z - \sin(\pi z)}{\sin^3(\pi z)} \right] \\ &= \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{-\pi^2 z \sin \pi z + \pi \cos \pi z - \pi \cos \pi z}{3 \sin^2(\pi z) \cos(\pi z) \cdot \pi} \right] \\ &= \frac{-\pi^2}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \cdot \frac{1}{\cos(\pi z)} \right] = \frac{-\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Aplicando el Teorema de los Residuos

$$\begin{aligned}\oint_{\partial C_N} f(z) dz &= 2\pi i \left[\frac{-\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=N \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^2} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{-\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right]\end{aligned}$$

Aplicando límite a ambos lados, analicemos al lado izquierdo

$$\left| \oint_{\partial C_N} f(z) dz \right| \leq \oint \left| \pi \frac{\cotg(\pi z)}{z^2} \right| dz = \pi \oint \frac{|\cotg(\pi z)|}{|z|^2} dz$$

pero $|\cotg(\pi z)| < M \quad \forall z \in \partial C_N, N \in \mathbb{N}$, luego

$$\left| \oint_{\partial C_N} f(z) dz \right| \leq \pi M \oint_{\partial C_N} \frac{1}{|z|^2} dz \leq \frac{\pi M}{(N + \frac{1}{2})^2} \oint_{\partial C_N} |dz|,$$

pues $|z| \geq (N + \frac{1}{2})$, y como $\oint_{\partial C_N}$ es el largo de la curva el cual es igual a $8(N + \frac{1}{2})$, se obtiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \oint_{\partial C_N} f(z) dz \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{8\pi M}{(N + \frac{1}{2})} = 0.$$

Es decir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi i \left[-\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right] = 0,$$

lo que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

■ Solución Problema 11.10

1. Sea $p \in D$ es un cero de orden k de f .

Entonces existe $R > 0$ tal que

$$f(z) = (z - p)^k g(z)$$

en $D(p, R)$ con g holomorfa en $D(p, R)$ y $g(p) \neq 0$.

Entonces

$$f'(z) = k(z - p)^{k-1} g(z) + (z - p)^k g'(z)$$

y por tanto, en una vecindad de p se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k(z - p)^{k-1} g(z) + (z - p)^k g'(z)}{(z - p)^k g(z)} \\ &= \frac{k}{z - p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.\end{aligned}$$

Además se tiene que $\frac{g'(z)}{g(z)}$ es holomorfa en p . Por lo tanto en el desarrollo de f'/f en p el único término singular es $\frac{k}{z-p}$, por lo que p es polo de orden 1 de f'/f , y su residuo es el coeficiente de dicho término, es decir k .

2. Sea $p \in D$ un polo de orden k de f . Entonces existe $R > 0$ tal que

$$f(z) = (z-p)^{-k}g(z)$$

en $D(p, R)$ con g holomorfa en $D(p, R)$ y $g(p) \neq 0$.

Entonces

$$f'(z) = -k(z-p)^{-k-1}g(z) + (z-p)^{-k}g'(z)$$

y por tanto, en una vecindad de p se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k(z-p)^{-k-1}g(z) + (z-p)^{-k}g'(z)}{(z-p)^{-k}g(z)} \\ &= \frac{-k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Por el mismo razonamiento que en a), se tiene que p es polo de orden 1 de f'/f , y su residuo es $-k$. (0.5 pts.)

3. Sea $p \in D$ que no es polo ni cero de f . Entonces f' es holomorfa en una vecindad de p (pues f lo es). dado que $f(p) \neq 0$, se tiene que $1/f$ también es holomorfa en una vecindad de p . Por lo tanto p no es polo de f'/f' .

Para concluir, por el teorema de los residuos y las preguntas a) y b) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{p \text{ polo de } f'/f} \text{Res}(f'/f, p) \\ &= \sum_{p \text{ cero de } f} k(p) + \sum_{p \text{ polo de } f} (-k(p)) \\ &= C - P \end{aligned}$$

(Donde $k(p)$ denota el orden del polo o del cero p , según corresponda).

■ Solución Problema 11.11

a)

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1+z)} = \frac{1}{z^2(1-(-z))} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

donde la última igualdad es válida si y sólo si $0 < |z| < 1 \iff z \in A_1$

Es decir que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^{n-2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 \dots$

Los coeficientes son

$$\begin{aligned} c_{-n} &= 0 \quad n \geq 3 \\ c_{-2} &= 1 \\ c_{-1} &= -1 \\ c_n &= (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Y los radios de convergencia son

$$\begin{aligned} R_1 &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|} = 0 \\ R_2 &= 1/\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1+z)} = \frac{1}{z^3(\frac{1}{z}+1)} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{z})^n$$

donde la última igualdad es válida si y sólo si $0 < |\frac{1}{z}| < 1 \iff z \in A_2$

Es decir que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z)^{-n-3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^7} \dots$
Los coeficientes son

$$\begin{aligned} c_{-n} &= (-1)^{n+1} \quad n \geq 3 \\ c_{-2} &= 0 \\ c_{-1} &= 0 \\ c_n &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Y los radios de convergencia son

$$\begin{aligned} R_1 &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|} = 1 \\ R_2 &= 1/\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1/0 = \infty \end{aligned}$$

■ Solución Problema 11.15

Sea $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y sea f una función holomorfa en $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ tal que

$$\int_{\Gamma} z^n f(z) dz = 0$$

para todo $n \geq 0$. Pruebe que $z = 0$ es una singularidad evitable de f .

Dado que $f \in H(D(0, 2))$, se tiene que $z_0 = 0$ es singularidad aislada de f . Por el teorema de series de Laurent, se tiene que f tiene un desarrollo en $z_0 = 0$. Es decir,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

para todo $z \in A$.

Entonces se tiene

$$z^n f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^{k+n} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{k-n} z^k. \quad (11.7)$$

Por otra parte, para todo $n \geq 0$ la función $z^n f(z)$ no tiene singularidades fuera de $z_0 = 0$, y este punto es encerrado por la curva simple Γ . Entonces, el teorema de los residuos implica que

$$\int_{\Gamma} z^n f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z^n f(z), 0) \quad (11.8)$$

y teniendo en cuenta la hipótesis sobre f se sigue que

$$\operatorname{Res}(z^n f(z), 0) = 0 \quad (11.9)$$

Por el teorema de series de Laurent, se tiene que $\operatorname{Res}(z^n f(z), 0)$ es igual al coeficiente del término z^{-1} en la serie de $z^n f(z)$.

Teniendo en cuenta el desarrollo (11.7) se sigue que $\operatorname{Res}(z^n f(z)) = a_{-n-1}$ para todo $n \geq 0$.

Gracias a 11.9 se concluye que $a_{-n-1} = 0$ para todo $n \geq 0$. Es decir, $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

Por lo tanto

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_k z^k$$

para todo $z \in A$, y entonces $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = a_0$ y por tanto $z_0 = 0$ es una singularidad evitable.

Capítulo 12

Evaluación de integrales vía residuos

12.1. Integrales de funciones trigonométricas

Consideremos una integral definida del tipo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{p(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{q(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)} d\theta, \quad (12.1)$$

donde p y q son polinomios.

La resolución de este tipo de integrales mediante el uso de las técnicas del cálculo en \mathbb{R} resulta a menudo bastante engorrosa dado que aparecen cuocientes de polinomios en $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$. Sin embargo, el uso del teorema de los residuos simplifica de manera sustancial el tratamiento de estas expresiones, como veremos a continuación.

Proponemos el siguiente cambio de variables:

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} i d\theta.$$

Notando que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

convertimos el integrando original en un cuociente de polinomios, esta vez en z , de modo que (12.1) se transforma en una integral de contorno en el plano \mathbb{C} , la que puede evaluarse utilizando el teorema de los residuos.

Para ilustrar lo anterior, veamos un ejemplo:

Ejemplo 12.1.1. Calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen} \theta}.$$

Solución Utilizando el cambio de variables propuesto, se tiene:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z-z^{-1}}{2i}} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

La fracción

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

tiene como polos simples a las raíces de la ecuación $z^2 + 4iz - 1 = 0$, las que resultan ser

$$\begin{aligned} z_1 &= -i(2 + \sqrt{3}), \\ z_2 &= -i(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Como

$$|-i(2 + \sqrt{3})| = 2 + \sqrt{3} > 1$$

y por otra parte

$$0 < |-i(2 - \sqrt{3})| = 2 - \sqrt{3} < 1,$$

sólo z_2 está encerrado por la curva $|z| = 1$.

Veamos cuánto vale $\text{Res}(f, z_2)$:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{2}{z + i(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2}{-i(2 - \sqrt{3}) + i(2 + \sqrt{3})} = \frac{2}{2i\sqrt{3}} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Finalmente, por el teorema de los residuos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \text{sen } \theta} = 2\pi i \text{Res}(f, z_2) = 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

El argumento anterior también es válido cuando se integran cocientes de polinomios en $\cos n\theta$ y $\text{sen } n\theta$ para $n > 1$ dado que estos pueden expresarse en términos de sumas de potencias de $z = e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \text{sen } n\theta &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \\ \text{cos } n\theta &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}. \end{aligned}$$

Ilustremos lo anterior mediante un ejemplo:

Ejemplo 12.1.2. Calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \operatorname{sen} \theta} d\theta.$$

Solución Hacemos las sustituciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \\ \cos 2\theta &= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{5 - \frac{2}{i}(z - z^{-1})} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{(z^4 + 1)dz}{2iz^2(2iz^2 + 5z - 2i)}$$

Es claro que en $z = 0$ tenemos un polo de orden 2. Calculemos las raíces de $2iz^2 + 5z - 2i = 0$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-5 + \sqrt{25 - 4 \cdot (2i) \cdot (-2i)}}{4i} = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16}}{4i} = \frac{i}{2} \\ z_2 &= \frac{-5 - \sqrt{25 - 4 \cdot (2i) \cdot (-2i)}}{4i} = \frac{-5 - \sqrt{25 - 16}}{4i} = 2i \end{aligned}$$

Como $|z_1| = \frac{1}{2} < 1$ y $|z_2| = 2 > 1$, sólo nos interesa el residuo R_1 asociado a z_1 . Veamos cuánto vale R_1 :

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{z^4 + 1}{2iz^2(2iz^2 + 5z - 2i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \frac{z^4 + 1}{2iz^2 \cdot 2i(z - 2i)} \\ &= \frac{(\frac{i}{2})^4 + 1}{2i(\frac{i}{2})^2 \cdot 2i(\frac{i}{2} - 2i)} \\ &= \frac{\frac{17}{16}}{\frac{-3i}{2}} = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{-3i} = \frac{17i}{24}. \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de los residuos:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2\pi i (R_1) = 2\pi i \left(\frac{17i}{24} \right) = \frac{-17\pi}{12}.$$

□

12.2. Integrales impropias sobre dominios no acotados

En esta sección nos interesaremos en el problema de evaluar integrales impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx,$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o más generalmente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Esta definición para la integral de $-\infty$ a ∞ , como el límite cuando $R \rightarrow \infty$ de las integrales definidas sobre los intervalos simétricos $[-R, R]$, se conoce como *valor principal de Cauchy* de la integral impropia.

En lo que sigue, supondremos que la función a integrar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ admite una extensión definida sobre todo el plano complejo mediante una función meromorfa(11.2.1), cuya restricción a \mathbb{R} coincide con la función original, y que denotamos simplemente por $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definamos el *semiplano superior* mediante

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\},$$

cuyo interior está dado por

$$\text{Int}(H) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

El siguiente teorema es un primer resultado que permite evaluar una gran variedad de integrales impropias.

Teorema 12.2.1. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:*

- (a) *f no tiene polos en \mathbb{R} , es decir, $\mathbb{R} \cap P = \emptyset$.*
- (b) *f admite un número finito de polos en $\text{Int}(H)$, es decir, $\text{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
- (c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 1$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, |z| \geq M.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f, z).$$

Demostración. Dado $R > 0$, denotemos por C_R el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, tal como se ilustra en la figura 12.1, de modo que su largo es $L(C_R) = \pi R$.

Por (a) y (b), para $R > 0$ suficientemente grande el camino C_R no pasa por ningún polo de f y, por (c), tenemos además la siguiente estimación:

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in C_R} |f(z)| \cdot L(C_R) \leq \frac{K}{|Re^{i\theta}|^p} \pi R = \frac{K\pi}{R^{p-1}}.$$

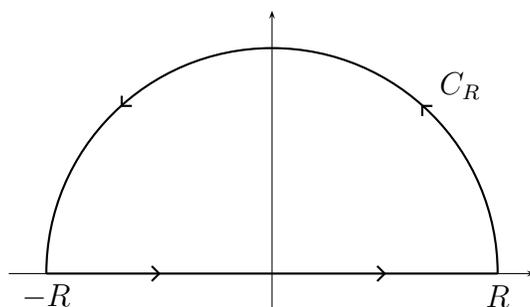


Figura 12.1: Arco de semicircunferencia

Como $p > 1$, deducimos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de los residuos 11.2.2 al camino cerrado y simple dado por $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ para R suficientemente grande de modo tal que Γ_R encierre todos los polos de f en $\text{Int}(H)$, se deduce

$$2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f, z) = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Finalmente, tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$ se obtiene

$$2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f, z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

lo que demuestra el teorema. ■

Un caso interesante para el cual es fácil verificar que se tienen las hipótesis del teorema 12.2.1 está dado por el siguiente resultado:

Corolario 12.2.2. Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que q no tiene ceros reales y además se tiene

$$\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 2. \quad (12.2)$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \text{Im}(z)>0} \text{Res}\left(\frac{p}{q}, z\right)$$

Demostración. Sea la función racional definida por $f(z) = p(z)/q(z)$. Dado que p y q son primos entre sí, los polos de $f(z)$ corresponden a los ceros de q , los que por hipótesis no son reales. Para aplicar el teorema 12.2.1, basta verificar que f satisface la condición de decaimiento (c). Para ver que esto es cierto, denotemos $n = \text{grado}(p)$ y $m = \text{grado}(q)$ y escribamos

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m} = \frac{z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right)}{z^m \left(\frac{b_0}{z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{z} + b_m \right)}$$

Pero $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| = |a_n|$, y similarmente $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^m} \right| = |b_m|$. Luego, para $|z|$ suficientemente grande, digamos $|z| \geq M$ para una constante $M > 0$ apropiada, se tiene $\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq 2|a_n|$ y $\left| b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^m} \right| \geq \frac{1}{2}|b_m|$, de donde se deduce que

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \underbrace{\frac{4|a_n|}{|b_m|}}_K \cdot \frac{1}{|z|^r}$$

con $r := m - n \geq 2$ en virtud de (12.2). ■

Ejemplo 12.2.3. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Solución En este caso, el integrando

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

es el cociente de los polinomios $p(z) = z^2$ y $q(z) = 1 + z^4$ evaluados en la variable real x . En primer lugar, la raíz de $p(z)$ es 0 de multiplicidad 2, mientras que las raíces de $q(z)$ están dadas por las soluciones de la ecuación $z^4 = -1$, es decir, por los complejos $e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{-i\pi/4}$ y $e^{-i3\pi/4}$, de los cuales ninguno es real y sólo los dos primeros se encuentran en el semiplano superior H . Como $p(z)$ y $q(z)$ no tienen raíces comunes, éstos son primos entre sí y además $\text{grado}(q) = 4 = \text{grado}(p) + 2$. De este modo, se satisfacen las hipótesis del corolario 12.2.2. Deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4} \right) + 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4} \right).$$

En este caso es fácil ver que $f(z) = (z^2/1+z^4)$ tiene polos simples en $e^{i\pi/4}$ y $e^{i3\pi/4}$ de modo que los residuos pueden calcularse mediante la fórmula (11.5) para obtener:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4} \right) = \frac{e^{i2\pi/4}}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4},$$

y similarmente

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4}\right) = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \frac{2\pi i}{4} [\cos(\pi/4) + \cos(3\pi/4) - i(\sin(\pi/4) + \sin(3\pi/4))] \\ &= \frac{2\pi i}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $f(x) = x^2/(1+x^4)$ es una función par, deducimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

Para estudiar qué ocurre cuando el integrando $f(z)$ admite polos reales, necesitamos el siguiente resultado preliminar.

Proposición 12.2.4. *Sea f meromorfa en un abierto Ω y $a \in \Omega$ un polo simple de f . Sea $C_{\varepsilon, \theta_1, \theta_2}$ la parametrización del arco de circunferencia de radio $\varepsilon > 0$ centrado en a cuyos límites son los ángulos θ_1 y θ_2 , es decir*

$$C_{\varepsilon, \theta_1, \theta_2}(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

tal como se ilustra en la figura 12.2.

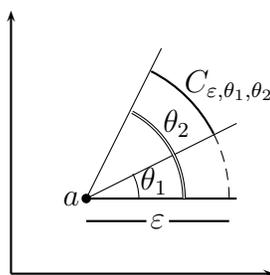


Figura 12.2: Segmento de arco de circunferencia

Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon, \theta_1, \theta_2}^*} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, a).$$

Demostración. Como f tiene un polo simple en a , entonces en torno a ese punto admite un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k}_{f_1(z)}, \quad |z-a| < \rho,$$

para algún radio $\rho > 0$ suficientemente pequeño y algunos coeficientes $(c_k) \subseteq \mathbb{C}$. Para $0 < \varepsilon < \rho$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon, \theta_1, \theta_2}} f(z) dz &= c_{-1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta + \underbrace{\int_{C_{\varepsilon, \theta_1, \theta_2}} f_1(z) dz}_{A_\varepsilon} \\ &= i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, a) + A_\varepsilon \end{aligned}$$

donde

$$|A_\varepsilon| \leq M \cdot L(C_{\varepsilon, \theta_1, \theta_2}) = M\varepsilon(\theta_2 - \theta_1),$$

para alguna constante $M > 0$ que acota a $f_1(z)$ en una vecindad del punto a , esta constante existe pues $f_1(z)$ es holomorfa en $D(a, \rho)$. Luego, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene $A_\varepsilon \rightarrow 0$ y se deduce el resultado. ■

Teorema 12.2.5. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:

(a) f admite un número finito de polos reales simples, es decir,

$$\mathbb{R} \cap P = \{a_1, \dots, a_s\}$$

con a_j polo simple de f .

(b) f admite un número finito de polos en $\operatorname{Int}(H)$, es decir, $\operatorname{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.

(c) Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 1$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, |z| \geq M.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int}(H) \cap P} \operatorname{Res}(f, z) + \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{Res}(f, a_j).$$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 12.2.1 tomando ahora un camino que evita los polos reales tal como se ilustra en la figura 12.3.

Por el teorema de los residuos, tenemos que para R suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ pequeño:

$$\int_{I(R, \varepsilon)} f(x) dx + \sum_{j=1}^s \int_{C_j(\varepsilon)} f(z) dz + \int_{\tilde{C}_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int}(H) \cap P} \operatorname{Res}(f, z), \quad (12.3)$$

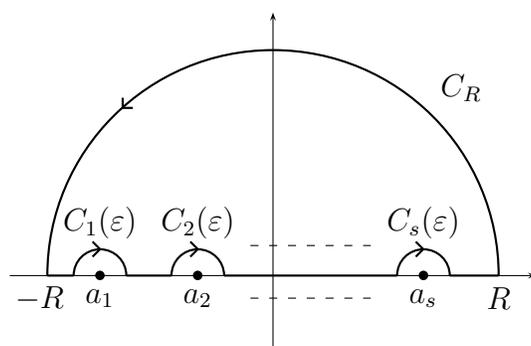


Figura 12.3: Camino que evita los polos reales

donde

$$I(R, \varepsilon) = [-R, R] \setminus \bigcup_{j=1}^s [a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon],$$

el camino $C_j(\varepsilon)$ es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma_j(t) = a_j + \varepsilon e^{i(\pi-t)}$, $t \in [0, \pi]$ y C_R es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = R e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. Por la proposición 12.2.4

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_j(\varepsilon)} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, a_j),$$

y por el mismo argumento que en el teorema 12.2.1,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Luego, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ en (12.3), se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{Res}(f, a_j) + 0 = 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int}(H) \cap P} \operatorname{Res}(f, z),$$

de donde se sigue el resultado. ■

Una consecuencia de este último resultado es el siguiente:

Corolario 12.2.6. Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que los ceros de q sobre el eje real, de existir, son simples, y se tiene además

$$\operatorname{grado}(q) \geq \operatorname{grado}(p) + 2.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z\right) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, a\right).$$

Por otra parte, cuando se trata de evaluar integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} sx dx$$

para $s > 0$ en general no es posible aplicar directamente los resultados anteriores a las funciones $f(z) \cos sz$ y $f(z) \operatorname{sen} sz$ respectivamente pues estas suelen no satisfacer la condición de decaimiento.

Esto se debe a que, por ejemplo, si explicitamos $\cos sz$ en términos de exponenciales

$$\cos sz = \frac{1}{2}(e^{isz} + e^{-isz}) = \frac{1}{2}(e^{-sy+isx} + e^{sy-isx})$$

vemos que cuando $R \rightarrow \infty$, las coordenadas imaginarias y de los puntos $z = x + iy \in C_R$ donde C_R es el arco de semicircunferencia considerado anteriormente (ver figuras 12.1 y 12.3), divergen a ∞ y en consecuencia el término e^{sy} si $s > 0$ crece exponencialmente.

Luego, para que $f(z) \cos sz$ satisfaga la condición de decaimiento, la función $f(z)$ debe decaer a 0 más rápido que una exponencial, lo que deja fuera a todas las funciones racionales que se obtienen como cocientes de polinomios.

Notemos que este inconveniente es consecuencia del término e^{-isz} que aparece en $\cos sz$, pues el otro término $e^{isz} = e^{-sy+isx}$ es muy favorable ya que decae exponencialmente a 0 cuando $y \rightarrow \infty$.

Por otra parte, si en lugar de considerar $f(z) \cos sz$ (resp. $f(z) \operatorname{sen} sz$), tomamos

$$f(z)e^{isz},$$

que para una gran variedad de funciones $f(z)$ sí satisface la condición de decaimiento necesaria para que la integral de $f(z)e^{isz}$ sobre C_R tienda a 0 gracias al buen comportamiento de e^{isz} , entonces podemos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx,$$

lo que resuelve el problema original pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} sx dx.$$

Más precisamente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 12.2.7. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:

(a) f no tiene polos en \mathbb{R} , es decir, $\mathbb{R} \cap P = \emptyset$.

(b) f admite un número finito de polos en $\text{Int}(H)$, es decir, $\text{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.

(c) Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, |z| \geq M.$$

Entonces, para todo $s > 0$ se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{isz} dz = 0, \quad (12.4)$$

donde C_R es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(e^{isz} f(z), w).$$

Demostración. Una vez verificado (12.4), la demostración es esencialmente la misma que la del teorema 12.2.1. Para probar (12.4), comencemos por acotar la integral para $R > M$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{isz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{isRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |e^{isRe^{i\theta}}| \cdot \frac{K}{R^p} R d\theta \\ &= \frac{KR}{R^p} \int_0^\pi e^{-sR \sin \theta} d\theta = \frac{2KR}{R^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-sR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que $\frac{\sin \theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{isz} dz \right| &\leq \frac{2KR}{R^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2sR}{\pi} \theta} d\theta \\ &= \frac{2KR}{R^p} \left[\frac{-\pi}{2sR} e^{-\frac{2sR}{\pi} \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2KR}{R^p} \frac{\pi}{2sR} [1 - e^{-sR}] \\ &\leq \frac{\pi K}{sR^p}. \end{aligned}$$

Como $p > 0$, se deduce (12.4). ■

Observación 12.2.8. En el teorema anterior basta con $p > 0$, a diferencia del teorema 12.2.1 que requiere $p > 1$. Esto se debe a que el buen decaimiento aportado por el término correspondiente a e^{isz} permite ser menos restrictivo sobre la función $f(z)$.

Corolario 12.2.9. Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que q no tiene ceros reales y además se tiene

$$\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 1. \quad (12.5)$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, \text{Im}(w)>0} \text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, w \right).$$

Ejemplo 12.2.10. Dado $s \geq 0$, calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$$

Solución Definamos $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$h(z) = \frac{e^{isz}}{z^2 + a^2}$$

Notemos que h es de la forma

$$h(z) = \frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}$$

con $p(z) = 1$ y $q(z) = z^2 + a^2$. Los ceros de $q(z)$ son simples y están dados por $\{ai, -ai\} \notin \mathbb{R}$. Además, $\text{grado}(q) = 2 > 0 + 1 = \text{grado}(p) + 1$. Luego, se satisfacen las hipótesis del corolario 12.2.9 y por lo tanto, para el caso $s > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot e^{isx} dx \\ &= 2\pi i \text{Res}(h, ai) = 2\pi i \frac{e^{-sa}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-sa}, \end{aligned}$$

pues

$$\text{Res}(h, ai) = \frac{e^{isia}}{2ai} = \frac{e^{-sa}}{2ai}.$$

El caso $s = 0$ se puede calcular directamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{arc tg} \left(\frac{x}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

En conclusión, para todo $s \geq 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-sa}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-sa}$$

y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} sx}{x^2 + a^2} dx = 0.$$

Notemos que esta última identidad es inmediata pues se trata del valor principal de una integral impropia de $-\infty$ a ∞ de un integrando dado por una función impar. \square

Para finalizar, enunciemos los resultados análogos al teorema 12.2.5 y al corolario 12.2.6:

Teorema 12.2.11. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:*

(a) *f admite un número finito de polos reales simples, es decir,*

$$\mathbb{R} \cap P = \{a_1, \dots, a_s\}$$

con a_j polo simple de f .

(b) *f admite un número finito de polos en $\operatorname{Int}(H)$, es decir, $\operatorname{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.*

(c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, |z| \geq M.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \operatorname{Int}(H) \cap P} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, w) + \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, a_j).$$

Corolario 12.2.12. *Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que los ceros de q sobre el eje real, de existir, son simples, y se tiene además*

$$\operatorname{grado}(q) \geq \operatorname{grado}(p) + 1.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, \operatorname{Im}(w)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, w\right) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, a\right).$$

12.3. Ejercicios

1. Pruebe que:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2a \cos 2\theta + a^2} d\theta = \pi \frac{1 - a + a^2}{1 - a}, \quad 0 < a < 1.$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\cosh a + \cos \theta} d\theta = 2\pi(-1)^n \frac{e^{-na}}{\sinh a}, \quad n \geq 0 \text{ es un entero y } a > 0.$$

$$d) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} \theta}{5 - 4 \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

2. Pruebe que:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad \text{con } a > 0.$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}, \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0.$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1 + x^2)^{n+1}} dx = -n \frac{\pi}{4}, \quad \text{para } n = 0 \text{ y } n = 1 \text{ (considere ambos casos separadamente)}.$$

$$e) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}), \quad a > 0.$$

3. Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{100} + 1}$$

4. Calcular la Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x) dx}{x^2 + a^2}$$

5. Calcule las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(mx)}{1+x^2+x^4} dx & \text{b)} \int_0^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx \\
 \text{c)} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{2+\cos(t)} dt & \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\alpha x)}{(x^2+1)(x+2)} dx \\
 \text{e)} \int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{(x^2+a^2)^2} dx & \text{f)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x+1)(x^2+1)} dx \\
 \text{g)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(sx)} dx, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, |a| > 1
 \end{array}$$

12.4. Problemas

Problema 12.1. Calcular las siguientes integrales

$$\text{(i)} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}{3-5\cos\theta} d\theta, \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{(x-4)(x^2+3)} dx.$$

Problema 12.2. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{1+a^2-2a\cos x} dx$$

con $a \in (0, 1)$.

Problema 12.3. Sea $D = \{x+iy : x > 0, y > 0\}$ y $f : \overline{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en \overline{D} y holomorfa en D . Suponga que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M/|z|^2$ para todo $z \in \overline{D}$, $|z| \geq 1$.

1. Pruebe que para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ se tiene

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = e^{i\theta} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta}x) dx.$$

2. Utilice lo anterior con $f(z) = \exp(iz)/(1+z)^2$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x)^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x)}{1+x^2} dx = 1.$$

Problema 12.4. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n+1} dx = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}[\pi(m+1)/n]},$$

donde m y n son enteros positivos distintos de cero tales que $n - m \geq 2$.

Indicación: puede ser útil considerar un camino como el de la figura 12.4.

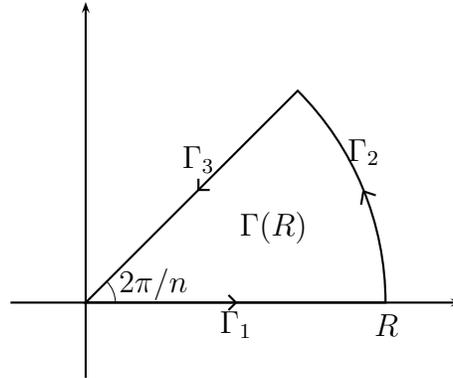


Figura 12.4: Camino cerrado

Problema 12.5. (a) Sea $f(z)$ una función holomorfa en \mathbb{C} tal que $f(z) \notin \mathbb{R}_-$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pruebe que

$$\Delta \log |f(z)| = 0.$$

(b) Si suponemos ahora que $|f(z)|$ es el producto de una función de x y una función de y , muestre que

$$|f(z)| = e^{p(x)+q(y)}, \text{ donde } p \text{ y } q \text{ son dos polinomios de grado 2.}$$

Finalmente concluya que

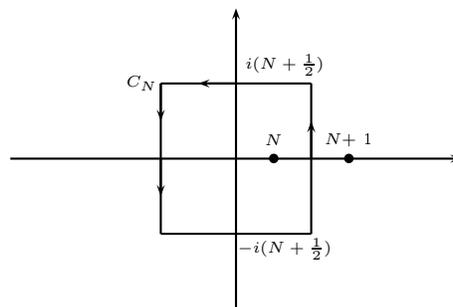
$$f(z) = \exp(\alpha z^2 + \beta z + \gamma), \text{ donde } \alpha, \beta \text{ y } \gamma \text{ son constantes complejas.}$$

Indicación: utilice la función logarítmica compleja, la cual es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(c) Mostrar que la parte (a) es también cierta cuando $f(z)$ es holomorfa en \mathbb{C} y sólo satisface que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema 12.6. ¹ Sea $f \in H(\mathbb{C} \setminus P)$ donde $P = \{p_1, \dots, p_l\}$ es el conjunto de los polos de f . Supongamos que $\exists M, R > 0, \exists p > 1$ tales que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R$ se tiene $|f(z)| \leq M/|z|^p$. Definamos además la función auxiliar $g(z) = \pi \cot(\pi z) f(z)$.

(i) Dado $N \geq 1$, considere el camino C_N de la figura.



¹Control 3. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

Demuestre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} g(z) dz = 0.$$

(ii) Pruebe que

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p_j}}^{\infty} f(n) = - \sum_{j=1}^l \operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z), p_j).$$

(iii) Usando lo anterior, demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problema 12.7. Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + 1)^2} dx = \pi \left(1 - \frac{3}{2e}\right)$.

Problema 12.8. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{az}}{e^x + 1} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Hint: integrar $\frac{e^{az}}{e^z + 1}$ en el rectángulo de vértices $\pm R$ y $\pm R + 2\pi i$

Problema 12.9.² Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 2$ con n raíces distintas z_1, \dots, z_n .

1. Pruebe que para $R > 0$ suficientemente grande, se tiene $\int_{\partial D(0,R)} \frac{1}{P(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{1}{P'(z_j)}$.
2. Deduzca que $\sum_{j=1}^n \frac{1}{P'(z_j)} = 0$.

Problema 12.10.³ Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$$

Indicaciones:

1. Sea Γ_R el rectángulo de vértices $-R$, R , $R + \pi i$ y $-R + \pi i$ con $R > 0$. Sea $f(z)$ la función estudiada en el inciso a). Pruebe que Γ_R encierra sólo un polo de f y que $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \pi e^{-\pi/2}$.
2. Pruebe que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R,2}} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R,4}} f(z) dz = 0$, donde $\Gamma_{R,2}$ y $\Gamma_{R,4}$ son los lados verticales de Γ_R

²Examen. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

³Control 3. Otoño 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

3. Concluya.

Problema 12.11. ⁴ Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcule la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx.$$

12.5. Resolución de problemas

■ Solución Problema 12.1

(i) Haciendo el cambio de variable $\sin 2\theta = \frac{z^2 - z^{-2}}{2i}$ y $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$, con $z = e^{i\theta}$, la integral queda de la forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{3 - 5 \cos \theta} d\theta &= \int_{|z|=1} \frac{\sqrt{\frac{z^2 - z^{-2}}{2i}}}{3 - 5 \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{i}} \int_{|z|=1} \frac{\sqrt{z^4 - 1}}{z(5z^2 - 6z + 5)} dz \\ &= -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{i}} \int_{|z|=1} \frac{\sqrt{z^4 - 1}}{z(z - (\frac{3+4i}{5}))(z - (\frac{3-4i}{5}))} dz \end{aligned}$$

Los polos de $f(z) = \frac{\sqrt{z^4 - 1}}{z(z - (\frac{3+4i}{5}))(z - (\frac{3-4i}{5}))}$ son $\{0, \frac{3+4i}{5}, \frac{3-4i}{5}\}$, todos simples. Solo se consideran los que están en $D(0, 1)$ (abierto), es decir, $\{0\}$.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z^4 - 1}}{(5z^2 - 6z + 5)} \\ &= \frac{i}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral vale $2\pi i \frac{-1}{i} \sqrt{\frac{2}{i}} \left(\frac{i}{5}\right)$.

(ii) Se considera la función $f(z) = \frac{ze^{i2z}}{(z-4)(z^2+3)}$, cuyo polo en el semiplano superior es $\{i\sqrt{3}\}$ y en el eje real $\{4\}$.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), i\sqrt{3}) &= \lim_{z \rightarrow i\sqrt{3}} \frac{ze^{i2z}}{(z-4)(z+i\sqrt{3})} = \frac{i\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}}}{(i\sqrt{3}-4)(2i\sqrt{3})}, \\ \text{Res}(f(z), 4) &= \lim_{z \rightarrow 4} \frac{ze^{i2z}}{(z^2+3)} = \frac{4e^{i8}}{19}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral vale:

$$2\pi i \frac{i\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}}}{(i\sqrt{3}-4)(2i\sqrt{3})} + \pi i \frac{4e^{i8}}{19}.$$

⁴Control 3. Otoño 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

- **Solución Problema 12.9** Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 2$ con n raíces distintas z_1, \dots, z_n .

1. Dado que cada z_j es un cero de orden 1 de P , se tiene que z_j es un polo de orden 1 de $1/P$. En particular $P'(z_j) \neq 0$, y se comprueba (con l'hôpital, o factorizando $P(z)$ por $z - z_j$), que

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{P(z)}, z_j \right) = \frac{1}{P'(z_j)}$$

Ahora, si $R > 0$ es tal que $\{z_1, \dots, z_n\} \subset D(0, R)$, por el teorema de los residuos y lo anterior se tiene que $\int_{\partial D(0, R)} \frac{1}{P(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{1}{P'(z_j)}$.

2. Dado que el grado de $P(z)$ es mayor o igual que 2, se tiene que

$$\left| \int_{\partial D(0, R)} \frac{1}{P(z)} dz \right| \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty$$

De esto y el inciso a) se tiene $\sum_{j=1}^n \frac{1}{P'(z_j)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(2\pi i \int_{\partial D(0, R)} \frac{1}{P(z)} dz \right) = 0$.

- **Solución Problema 12.10**

1. La curva Γ_R sólo encierra puntos cuya parte imaginaria está en $(0, \pi)$. El único z_n que cumple esto es $\frac{1}{2}\pi i$.

Además Γ_R no interseca ningún z_n , por lo que el teorema de los residuos implica que

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(f, \frac{1}{2}\pi i \right)$$

Por último, el polo es de primero orden, por lo que calculando el residuo se tiene que

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res} \left(f, \frac{1}{2}\pi i \right) &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{2 \cos(iz)}, \frac{1}{2}\pi i \right) \\ &= 2\pi i \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}}{-2 \operatorname{sen}(-\frac{1}{2}\pi)i} \\ &= 2\pi \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{-2(-1)} \\ &= \pi e^{-\pi/2} \end{aligned}$$

2. Sea $\Gamma_{R,2}$ el segmento entre R y $R + \pi i$. Entonces una parametrización de $\Gamma_{R,2}$ está dada por $\gamma(t) = R + it$, con $t \in [0, \pi]$.

Entonces

$$\int_{\Gamma_{R,2}} f(z) dz = \int_0^1 \frac{e^{i(R+it)}}{e^{R+it} + e^{-R-it}} i dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{ie^{-t+iR}}{e^{R+it} + e^{-R-it}} dt$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_{R,2}} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{ie^{-t+iR}}{e^{R+it} + e^{-R-it}} \right| dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{|e^{R+it} + e^{-R-it}|} dt \end{aligned}$$

Ahora, para el denominador se tiene que

$$|e^{R+it} + e^{-R-it}| = e^R |e^{it} + e^{-2R} e^{-it}|$$

y además

$$\begin{aligned} 1 = |e^{it}| &\leq |e^{it} + e^{-2R} e^{-it}| + |e^{-2R} e^{-it}| \\ &= |e^{it} + e^{-2R} e^{-it}| + e^{-2R} \end{aligned}$$

por lo que

$$|e^{it} + e^{-2R} e^{-it}| \geq 1 - e^{-2R} \geq \frac{1}{2}$$

para R grande. (i.e. para $R \geq R_0$).

De lo anterior se tiene que

$$\int_0^\pi \frac{1}{|e^{R+it} + e^{-R-it}|} dt \leq \int_0^\pi e^{-R} dt = \pi e^{-R} \rightarrow 0$$

y por tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R,2}} f(z) dz = 0$$

Para la curva $\Gamma_{R,4}$ entre los puntos $-R$ y $-R + \pi i$, se puede parametrizar por $\gamma(t) = -R + ti$, por lo que el numerador del integrando también está acotado (aparece e^{-Ri-t}), y el denominador es el mismo, por lo que la prueba resulta análoga.

3. Sean $\Gamma_{R,1}$ y $\Gamma_{R,3}$ los lados inferior y superior de Γ_R , respectivamente. Se pueden parametrizar por

$$\gamma_1(t) = t$$

$$\gamma_3(t) = t + i\pi$$

con $t \in [-R, R]$ (notar que $\Gamma_{R,3}$ esta parametrizada en sentido inverso al que le corresponde en la curva Γ).

Entonces

$$\int_{\Gamma_{R,1}} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{R,3}} f(z)dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{it-\pi}}{e^{t+i\pi} + e^{-t-i\pi}} dt \\ &= e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{e^t e^{i\pi} + e^{-t} e^{-i\pi}} dt \\ &= -e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt \\ &= -e^{-\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} f(z)dz\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{R,j}} f(z)dz$, del inciso 2) (y teniendo en cuenta la orientación de Γ), se sigue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = (1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$$

y por el inciso 1) tenemos que

$$(1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \pi e^{-\pi/2}$$

de donde se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$$

Por último, dado que $e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$, se tiene que la integral que se pide es la parte real de la que recién calculamos, de donde se concluye. ■

- **Solución Problema 12.11** Definimos la función

$$f(z) = e^{iz} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 - b^2)}$$

Entonces f es de la forma $e^{iz} \frac{p}{q}$, con p y q polinomios de grado 0 y 4 respectivamente. Los ceros de q (y por tanto polos de f) son $\{-ia, ia, -b, b\}$, cada uno de primer orden.

Aplicando el teorema visto en clase sobre integrales de este tipo de funciones se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) + \pi i (\operatorname{Res}(f, -b) + \operatorname{Res}(f, b))$$

pues ia pertenece al semiplano superior y los dos polos restantes a la recta real.

Calculando cada límite, se tiene que

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} (z-ia)f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} e^{iz} \frac{1}{(z+ia)(z^2-b^2)} = e^{-a} \frac{1}{(2ia)(-a^2-b^2)} = e^{-a} \frac{+i}{2a(a^2+b^2)},$$

$$\operatorname{Res}(f, b) = \lim_{z \rightarrow b} (z-b)f(z) = \lim_{z \rightarrow b} e^{iz} \frac{1}{(z^2+a^2)(z+b)} = e^{ib} \frac{1}{(b^2+a^2)2b} = (\cos(b)+i \operatorname{sen}(b)) \frac{1}{2b(a^2+b^2)}$$

y

$$\operatorname{Res}(f, -b) = \lim_{z \rightarrow -b} (z+b)f(z) = \lim_{z \rightarrow -b} e^{iz} \frac{1}{(z^2+a^2)(z-b)} = e^{-ib} \frac{1}{(b^2+a^2)(-2b)} = (\cos(b)-i \operatorname{sen}(b)) \frac{1}{2b(a^2+b^2)}$$

Teniendo en cuenta que $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} dx &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} e^{ix} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} \\ &= \operatorname{Re} [2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) + \pi i (\operatorname{Res}(f, -b) + \operatorname{Res}(f, b))] \\ &= -2\pi e^{-a} \frac{1}{2a(a^2+b^2)} - \pi \operatorname{sen}(b) \frac{1}{2b(a^2+b^2)} - \pi \operatorname{sen}(b) \frac{1}{2b(a^2+b^2)} \end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que el integrando es una función par, se concluye que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} dx = -\pi e^{-a} \frac{1}{2a(a^2+b^2)} - \pi \operatorname{sen}(b) \frac{1}{2b(a^2+b^2)}.$$

Parte III

Análisis de Fourier

Capítulo 13

Series de Fourier

13.1. Definición

Resulta fundamental, para el posterior análisis de ecuaciones en derivadas parciales, la noción de lo que es una *serie de Fourier*.

Definición 13.1.1. Sea $f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua (basta continua por trozos). Diremos que f admite un desarrollo en serie de Fourier en $[-\ell, \ell]$ si existen escalares a_0, a_1, \dots y b_1, b_2, \dots tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right], \quad \forall x \in [-\ell, \ell] \\ &= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right], \quad \forall x \in [-\ell, \ell] \end{aligned}$$

Este tipo de Series surge como respuesta a la siguiente pregunta: ¿Podemos expresar una función continua como una combinación lineal (eventualmente, como una serie infinita) de funciones sinusoidales de frecuencia cada vez mayor? Si esto es posible, ¿cómo se obtienen los coeficientes en términos de $f(x)$?

Para responder a esta última pregunta, supongamos que f admite desarrollo en serie de Fourier y escribamos la serie en forma compleja. Recordemos que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} \end{aligned}$$

Luego si $f(x)$ admite un desarrollo en serie de Fourier, entonces podemos reescribir este desar-

rollo como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{\frac{in\pi x}{\ell}} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{\frac{-in\pi x}{\ell}} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} \end{aligned} \quad (13.1)$$

donde $C_0 = \frac{a_0}{2}$ y

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{si } k \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_k) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

Para determinar los coeficientes complejos, podemos proceder, al menos formalmente, como sigue: fijamos $k_0 \in \mathbb{Z}$ y multiplicamos la ecuación (13.1) por $e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}}$ e integramos en el intervalo $[-\ell, \ell]$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}} dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}} dx \\ &= 2\ell C_{k_0} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq k_0}}^{\infty} C_k \int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} dx \end{aligned}$$

pero notemos que para $k \neq k_0$

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} dx = \frac{\ell}{i(k-k_0)\pi} e^{\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} \Big|_{-\ell}^{\ell} = 0,$$

donde hemos usado el hecho que $\sin(k\pi) = 0$, y por lo tanto

$$C_{k_0} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{-\frac{ik_0\pi \xi}{\ell}} d\xi$$

Ahora podemos regresar a los coeficientes reales. Primero, es claro que

$$a_0 = 2C_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx$$

Si $n \geq 1$ entonces:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} a_n &= 2\operatorname{Re}(C_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \\ b_n &= -2\operatorname{Im}(C_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \end{aligned}$$

Observemos que de las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{in\pi x}{\ell}} e^{-\frac{im\pi x}{\ell}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2\ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

se deducen las correspondientes relaciones

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Recapitulando, si f es expresable en serie de Fourier entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{ik\pi\xi/\ell} d\xi \right] e^{ik\pi x/\ell} \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\} \end{aligned}$$

Dadas dos funciones integrables $f, g : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{C}$ que supondremos además de cuadrado integrable, es decir $\int_{-\ell}^{\ell} f^2(t) dt < \infty$ y lo mismo para g , definimos

$$\langle f, g \rangle_{L^2} \equiv \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \bar{g}(x) dx$$

Notemos, que dada la definición anterior, se cumple que

$$\langle f, f \rangle_{L^2} = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \bar{f}(x) dx = \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

De esta forma tiene sentido definir

$$\|f\|_{L^2} \equiv \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \left(\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

En el caso de la exponencial compleja de la serie de Fourier

$$\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{L^2} = \left(\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} e^{-\frac{ik\pi x}{\ell}} dx \right)^{1/2} = \sqrt{2\ell}$$

Luego, los coeficientes de Fourier (en su forma compleja) pueden reescribirse como

$$C_k = \frac{1}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{L^2}} \left\langle f, e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} \right\rangle_{L^2}$$

y por lo tanto, la descomposición de f viene dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle f, e^{\frac{ik\pi x}{\ell}} \right\rangle_{L^2}}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{L^2}} \cdot \frac{e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{L^2}}$$

Además, se tiene que para $k \neq j$

$$\left\langle e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}, e^{\frac{ij\pi x}{\ell}} \right\rangle_{L^2} = \int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{i(k-j)\pi x}{\ell}} dx = 0.$$

Notemos la analogía con \mathbb{R}^n al momento de descomponer un vector \vec{x} en una base ortogonal $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \vec{x}, e_k \rangle}{\|e_k\|} \frac{e_k}{\|e_k\|}$$

donde la base cumple

$$\langle e_k, e_j \rangle = 0, \quad \forall k \neq j.$$

Así, la serie de Fourier de f , en forma compleja, se puede interpretar como una generalización de la descomposición en una base ortogonal, pero aplicada a funciones en lugar de vectores.

13.2. Convergencia

Aunque supusimos que f es continua, en realidad basta que sea integrable para que los coeficientes de Fourier estén bien definidos. Dada una función f integrable en $[-\ell, \ell]$, definamos

$$S_f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_f^N(x),$$

cuando el límite exista, con

$$S_f^N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

donde los coeficientes se calculan como antes, es decir

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Bajo condiciones apropiadas, es posible asegurar la convergencia de la serie.

Ejemplo 13.2.1. Consideremos el caso particular de una función $f(x)$ con periodo 2π (i.e. $\ell = \pi$) que es continua con primera y segunda derivadas ambas continuas. Al integrar por partes el término a_n se tiene lo siguiente:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{f(x) \operatorname{sen}(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

El primer término del segundo miembro es cero. Al integrar otra vez por partes se obtiene

$$a_n = \frac{f'(x) \cos(nx)}{n^2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx$$

El primer término del segundo miembro es cero debido a la periodicidad y la continuidad de $f'(x)$. Puesto que f'' es continua en el intervalo de integración, se tiene

$$|f''(x)| \leq M,$$

para alguna constante M adecuada. Además, $|\cos(nx)| \leq 1$. Se sigue que

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{2M}{n^2}$$

De manera similar, $|b_n| \leq \frac{2M}{n^2}$ para todo n . Por lo tanto, tenemos que para todo x y para cada $N \geq 1$, $M \geq 1$,

$$|S_f^{N+M}(x) - S_f^N(x)| \leq 4M \left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(N+M)^2} \right).$$

Como $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, de aquí se deduce que $(S_f^N(x))_{N \geq 1}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

Una vez que se tiene la convergencia de la serie de Fourier $S_f(x) \in \mathbb{R}$, la pregunta natural es si podemos asegurar que $S_f(x) = f(x)$ para cualquier $x \in [-\ell, \ell]$. Una respuesta completa a esta pregunta va más allá del alcance de este apunte. Nos contentaremos con enunciar sin demostración algunos resultados que abordan este punto al menos en forma parcial.

Un primer resultado que establece una relación asintótica entre la función $f(x)$ y las sumas parciales de su serie de Fourier es el siguiente:

Proposición 13.2.2. Si f es de cuadrado integrable, se tiene que $S_f^N \rightarrow f$ en media cuadrática:

$$\int_{-\ell}^{\ell} [f(x) - S_f^N(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

El resultado anterior no permite relacionar directamente el valor de $S_f(x)$, si existe, con $f(x)$ para un punto x dado. Un resultado bastante general en este sentido es el siguiente:

Teorema 13.2.3. Si una función $f(x)$ es continua por trozos en el intervalo $[-\ell, \ell]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-\ell, \ell)$, con derivada por la izquierda en $x = \ell$ y por la derecha en $x = -\ell$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ es convergente para cada $x \in [-\ell, \ell]$. En los extremos del intervalo se tiene

$$S_f(\ell) = S_f(-\ell) = \frac{1}{2}[f(\ell) + f(-\ell)].$$

Para $x \in (-\ell, \ell)$, el valor de la serie es $f(x)$, salvo en algún punto x_0 en el que $f(x)$ es discontinua, donde el valor de la serie es el promedio de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en x_0 .

Cuando la función $f(x)$ es suficientemente regular, es posible asegurar convergencia uniforme:

Proposición 13.2.4. Si f es derivable en $[-\ell, \ell]$ y $f(\ell) = f(-\ell)$ entonces $f = S_f$ en $[-\ell, \ell]$. Si además f' es de cuadrado integrable la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.

Corolario 13.2.5. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es 2ℓ -periódica de clase \mathcal{C}^1 entonces $f = S_f$ en \mathbb{R} y S_f^N converge uniformemente hacia f .

13.3. Propiedades y ejemplos

Comencemos por notar que si $g : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función impar, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx &= \int_{-\ell}^0 g(x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = - \int_{-\ell}^0 g(-x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx \\ &= \int_0^{\ell} g(-x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = \int_0^{\ell} [g(-x) + g(x)] dx = 0 \end{aligned}$$

Luego:

- (1) Si f es par entonces $f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es impar de donde $b_n = 0, \forall n \geq 1$.
Luego, para un función par se tiene

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

- (2) Si f es impar entonces $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es impar de donde $a_n = 0, \forall n \geq 0$.
Luego, para una función impar se tiene

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Ejemplo 13.3.1. Desarrollo en serie de Fourier de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$. Como f es impar $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, de donde

$$S_f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen} nx$$

y los coeficientes b_n vienen dados por

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} - \frac{x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \frac{\cos nx}{n} dx = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

Así, para los primeros coeficientes se tiene

$$b_1 = 2, b_2 = \frac{-2}{2}, b_3 = \frac{2}{3}, b_4 = \frac{-2}{4}, \dots$$

Es decir

$$S_f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x + \dots$$

En virtud de la regularidad de f , se tiene $f(x) = S_f(x)$. En particular, se deduce lo siguiente

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right],$$

lo que prueba la siguiente identidad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo 13.3.2. Serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

Como f es par entonces $b_n = 0$. Luego $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ donde

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 x^2 \cos(n\pi x) dx \\ &= x^2 \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 - \frac{2}{n\pi} \int_{-1}^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[-\frac{x \cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \right] \end{aligned}$$

es decir

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2} [\cos n\pi + \cos(-n\pi)] = \frac{4}{(n\pi)^2} (-1)^n.$$

En consecuencia

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[-\cos(\pi x) + \frac{1}{4} \cos(2\pi x) - \frac{1}{9} \cos(3\pi x) + \frac{1}{16} \cos(4\pi x) - \frac{1}{25} \cos(5\pi x) + \dots \right].$$

Un corolario interesante de la fórmula anterior es

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \right]$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De la misma forma se puede observar que

$$4 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \dots \right]$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{11\pi^2}{12}.$$

13.4. Ejercicios

1. Encuentra la serie de Fourier de las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$.
- (b) $f(x) = ax$ en $[-\pi, \pi]$
- (c) $f(x) = ax^2$ en $[-\pi, \pi]$.
- (d) $f(x) = ax^2$ en $[0, 2\pi]$.
- (e) $f(x) = e^{\alpha x}$ en $[-\pi, \pi]$.
- (f) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ en $[-\pi, \pi]$.
- (e)

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } -\pi < x < 0 \\ b & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2. Desarrolle en serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3. Dada la función $f(x) = |x|$, encuentre:

- (i) Su serie de Fourier en el intervalo $[0, 2]$.
- (ii) Su serie de Fourier en el intervalo $[-1, 1]$.
- (iii) Su desarrollo en series de senos en $[0, 1]$
- (iv) Su desarrollo en series de cosenos en $[0, 1]$

Indicación: Para (iii) y (iv) primero extender f de manera adecuada (par o impar) al intervalo $[-1, 1]$.

13.5. Problemas

Problema 13.1.¹ Calcular la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi < x < 0 \\ 6 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Señale el límite de la serie en cada punto de $[-\pi, \pi]$, y justifique. Deduzca que $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

Indicación: Para calcular la serie descrita arriba evalúe la serie de Fourier en un punto adecuado.

Problema 13.2.

Desarrolle en serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Problema 13.3. Sea $f \in C^1$, 2π -periodica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

(a) Probar la identidad de Parseval, esto es:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

¹Control 3. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

(b) Deduzca que

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2)$$

(c) Pruebe la desigualdad de Wirtinger.

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \quad (13.2)$$

(d) Pruebe que se da la igualdad en (13.2) si y sólo si $f(x) = a \cos(nx) + b \sin(nx)$.

Problema 13.4. (a) Demuestre que la función $f(x) = \cos(x)$, $x \in (0, \pi)$, admite el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} \right) \sin(2nx)$$

indicación:

$$\begin{aligned} 2 \cos(\alpha) \sin(\beta) &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\ 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

(a) Pruebe que:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots$$

13.6. Resolución de problemas

■ Solución Problema 13.1

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 2 dx + \int_0^{\pi} 6 dx \right] = \frac{1}{\pi} [2\pi + 6\pi] = 8$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 2 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 6 \cos(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} [2(\sin(0) - \sin(-n\pi)) + 6(\sin(n\pi) - \sin(0))] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 2 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 6 \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{-1}{n\pi} [2(\cos(0) - \cos(-n\pi)) + 6(\cos(n\pi) - \cos(0))] \\ &= \frac{-1}{n\pi} [2(1 - (-1)^n) + 6((-1)^n - 1)] = \frac{4}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{8}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Fourier es:

$$S_f(x) = 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{(2i-1)\pi} \sin((2i-1)x)$$

Como la función $f(x)$ tiene derivada continua en todo el intervalo excepto en un sólo punto, sabemos que se tiene la igualdad siguiente

$$S_f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

donde $f(x^-)$ y $f(x^+)$ representan los límites por izquierda y por derecha respectivamente. Y además

$$S_f(-\pi) = S_f(\pi) = \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$$

En nuestro caso particular tenemos que

$$S_f(x) = \begin{cases} 4 & x = -\pi \\ 2 & x \in (-\pi, 0) \\ 4 & x = 0 \\ 6 & x \in (0, \pi) \\ 4 & x = \pi \end{cases}$$

Evaluando en $x = \frac{\pi}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned} 6 &= 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{(2i-1)\pi} \sin((2i-1)\pi/2) \\ 6 &= 4 + \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} (-1)^{i+1} \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)} (-1)^{i+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \end{aligned}$$

Capítulo 14

La transformada de Fourier

14.1. Definición y el teorema de inversión

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Es posible demostrar que en este caso, dado $\ell > 0$, se tiene que para todo $x \in]-\ell, \ell[$

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N C_k e^{i \frac{k\pi x}{\ell}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \frac{k\pi x}{\ell}}$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{-i \frac{k\pi \xi}{\ell}} d\xi, \quad C_k \in \mathbb{C}.$$

¿Qué ocurre cuando $\ell \rightarrow +\infty$?

Reescribamos lo anterior de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) e^{i(x-y) \frac{k\pi}{\ell}} dy \quad \forall x \in [-\ell, \ell].$$

Definimos

$$g_{x,\ell}(s) = \int_{-\ell}^{\ell} f(y) e^{i(x-y)s} dy.$$

De esta forma, f se escribe

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{x,\ell} \left(\frac{k\pi}{\ell} \right) \frac{\pi}{\ell} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{x,\ell} \left(\frac{k\pi}{\ell} \right) \left[(k+1) \frac{\pi}{\ell} - k \frac{\pi}{\ell} \right]. \end{aligned}$$

Esta última expresión puede verse como la suma de Riemann de la función $g_{x,\ell}$ sobre $(-\infty, \infty)$ con un paso $\Delta = \frac{\pi}{\ell}$. Es claro que si $\ell \rightarrow \infty$ entonces el paso de la partición $\Delta = \frac{\pi}{\ell}$ tiende a

cero. Por otra parte, se tiene que:

$$g_{x,\ell}(s) \rightarrow g_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(x-y)s} dy.$$

Se razonable esperar que las sumas de Riemann de $g_{x,\ell}$ se aproximen a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds$. De este modo deducimos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_x(s) ds \quad \text{donde} \quad g_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(x-y)s} dy \quad (14.1)$$

Lo anterior no se hizo rigurosamente pues las sumas de Riemann corresponden a funciones que dependen de ℓ y no a una función fija. Sin embargo, bajo ciertas condiciones se puede demostrar que la convergencia $g_{x,\ell} \rightarrow g_x$ cuando $\ell \rightarrow \infty$ es tal que permite justificar lo anterior de manera rigurosa. Esto va más allá de este apunte.

Así, formalmente tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(x-y)s} dy \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys} dy \right] ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys} dy \right] ds \end{aligned} \quad (14.2)$$

Este desarrollo motiva las siguientes definiciones:

Definición 14.1.1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable (i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < \infty$). Se define la transformada de Fourier de la función f como

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\rightarrow \hat{f}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys} dy \end{aligned} \quad (14.3)$$

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ otra función integrable. Se define la antittransformada de Fourier de g como

$$\begin{aligned} \check{g}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{ixs} ds \end{aligned} \quad (14.4)$$

Notación. Otras notaciones habitualmente usadas para la transformada de Fourier $\hat{f}(s)$ son las siguientes: $Tf(s)$ y $\mathcal{F}f(s)$. Del mismo modo, para la antittransformada se usa además de $\check{g}(x)$: $T^{-1}g(x)$ y $\mathcal{F}^{-1}g(x)$.

Aceptaremos sin demostración lo siguiente:

Teorema 14.1.2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable, entonces su transformada de Fourier $Tf = \hat{f}$ está bien definida y resulta ser una función continua.

En términos de estas definiciones, la fórmula (14.1) puede expresarse de acuerdo al siguiente resultado:

Teorema 14.1.3 (de inversión). *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable y supongamos además que $Tf = \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable. Entonces se tiene que si f es continua:*

$$f(x) = T^{-1}(Tf)(x) = \check{\hat{f}}(x)$$

es decir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iys} dy \right] ds \quad (14.5)$$

Corolario 14.1.4. *Si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas, integrables y $\hat{f} = \hat{g}$, entonces $f = g$.*

Observación 14.1.5. *T y T^{-1} son lineales. Esto se desprende directamente de la linealidad de la integral.*

14.2. Propiedades fundamentales

14.2.1. La transformada de una derivada

Proposición 14.2.1. *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable con derivada $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ también integrable (o sea f y f' poseen transformada de Fourier). Entonces*

$$\hat{f}'(s) = is\hat{f}(s) \quad (14.6)$$

Demostración. Para demostrar la proposición anterior, primero es necesario probar lo siguiente:

Lema 14.2.2. *Si f es continua en \mathbb{R} y tal que f, f' son integrables en \mathbb{R} , entonces*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Demostración.

Lo hacemos para $x \rightarrow +\infty$. Como f' es integrable, la integral $\int_0^{\infty} f'(x) dx$ también converge. Esto nos permite afirmar que $f(x)$ converge cuando $x \rightarrow +\infty$. En efecto, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(0)) + f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f'(t) dt + f(0) \in \mathbb{C}$$

Por otra parte, si el $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| > 0$, f no podría ser integrable en \mathbb{R} . Luego necesariamente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

■

Continuando con la demostración de la proposición, en principio tenemos

$$\widehat{f}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-isx} dx = \lim_{L, M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^L f'(x)e^{-isx} dx$$

Integrando esta última integral por partes y teniendo en cuenta la continuidad de f , resulta

$$\begin{aligned} \int_{-M}^L f'(x)e^{-isx} dx &= f(x)e^{-isx} \Big|_{-M}^L + \int_{-M}^L f(x)ise^{-isx} dx \\ &= (f(L)e^{-isL} - f(-M)e^{isM}) + is \int_{-M}^L f(x)e^{-isx} dx \end{aligned}$$

El lema anterior garantiza que lo que está entre paréntesis tiende a cero mientras que la integral del segundo sumando converge a $\widehat{f}(s)\sqrt{2\pi}$. De esta forma queda probada la proposición. ■

Corolario 14.2.3. *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable, k veces derivable, tal que $f^{(k)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ también es integrable, es decir $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$ poseen transformada de Fourier. Entonces*

$$\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$$

Ejemplo 14.2.4. [Resolución de una EDO] Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$3y'' + 2y' + y = f(x), \tag{14.7}$$

donde $f(x)$ es una función conocida, continua e integrable en \mathbb{R} .

Apliquemos transformada de Fourier

$$\begin{aligned} 3\widehat{y}'' + 2\widehat{y}' + \widehat{y} &= \widehat{f}(s) \\ (-3s^2 + 2is + 1)\widehat{y}(s) &= \widehat{f}(s) \end{aligned}$$

y concluimos que

$$\widehat{y}(s) = \frac{\widehat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1}.$$

Aplicando antitransformada

$$\begin{aligned} y(x) &= T^{-1}(\widehat{y}(s)) \\ &= T^{-1}\left(\frac{\widehat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{\widehat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1} ds. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Para una función $f = f(x)$ particular se hace el cálculo explícito de esta integral cuando sea posible.

14.2.2. El teorema de convolución

Definición 14.2.5. Dadas f, g integrables, definimos el producto de convolución de f y g mediante

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy$$

Teorema 14.2.6 (de convolución). Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones integrables. Entonces se cumple que

$$\widehat{f * g}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)\sqrt{2\pi} \quad (14.9)$$

o bien en forma inversa

$$T^{-1}(\hat{f}(s)\hat{g}(s))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(x) \quad (14.10)$$

Demostración. Un cálculo directo proporciona:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy}(f * g)(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-\xi)g(\xi)d\xi dy \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\xi}g(\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(y-\xi)}f(y-\xi)dy}_{\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)} d\xi \\ &= \hat{f}(s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\xi}g(\xi)d\xi = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s) \end{aligned}$$

■

14.2.3. Compendio de propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

- Traslación en espacio

$$\widehat{f(x-x_0)}(s) = e^{-isx_0}\hat{f}(s)$$

- Traslación en frecuencia

$$\widehat{e^{is_0x}f(x)}(s) = \hat{f}(s-s_0)$$

- Modulación

$$\begin{aligned} \widehat{f(x)\cos(w_0x)}(s) &= \frac{1}{2}[\hat{f}(s-w_0) + \hat{f}(s+w_0)] \\ \widehat{f(x)\sen(w_0x)}(s) &= \frac{1}{2i}[\hat{f}(s+w_0) - \hat{f}(s-w_0)] \end{aligned}$$

- Cambio de escala

$$\widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a \neq 0$$

- Inversión del espacio (o del tiempo)

$$\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$$

- Convolución

$$\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$$

- Derivación

$$\widehat{f'(x)}(s) = is \hat{f}(s)$$

de esto último se deduce que

$$\widehat{f^{(k)}(x)}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

14.3. Ejemplos

Ejemplo 14.3.1. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Tenemos que $f(x)$ es integrable más aún $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sqrt{\pi}$ y es una función positiva. Por definición

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-isx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2 - \frac{s^2}{4}} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx. \end{aligned}$$

Llamemos I a la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx$. Para calcularla consideremos el siguiente camino (ver figura 14.1) y la función definida en el plano complejo $f(z) = e^{-z^2}$ la cual es holomorfa por ser composición de funciones holomorfas. Entonces

$$0 = \oint_{C_R} e^{-z^2} dz = \sum_{j=1}^4 \int_{C_R^j} e^{-z^2} dz.$$

Para cada uno de los segmentos de este camino tenemos:

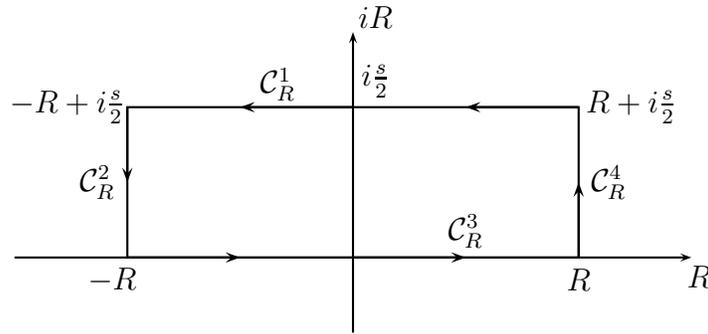


Figura 14.1: Camino de integración para calcular $\widehat{e^{-x^2}}$

1.

$$\begin{aligned} \int_{C_R^1} e^{-z^2} dz &= \int_R^{-R} e^{-(x+i\frac{s}{2})^2} dx \\ &= - \int_{-R}^R e^{-(x+i\frac{s}{2})^2} dx \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{C_R^2} e^{-z^2} dz &= \int_{\frac{s}{2}}^0 e^{-(-R+iy)^2} i dy \\ &= -i \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(-R+iy)^2} dy \end{aligned}$$

3.

$$\int_{C_R^3} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

4.

$$\int_{C_R^4} e^{-z^2} dz = i \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(R+iy)^2} dy$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{C_R^2} e^{-z^2} dz + \int_{C_R^4} e^{-z^2} dz &= i \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(R+iy)^2} - e^{-(-R+iy)^2} dy \\ &= ie^{-R^2} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{y^2} [e^{-i2Ry} - e^{i2Ry}] dy \\ &= 2e^{-R^2} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{y^2} \text{sen}(2Ry) dy. \end{aligned}$$

Esta última igualdad implica que

$$\left| \int_{C_R^2} e^{-z^2} dz + \int_{C_R^4} e^{-z^2} dz \right| \leq 2e^{-R^2} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$ en $\oint_{C_R} e^{-z^2} dz$ se deduce que

$$- \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 0$$

y por lo tanto

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

En consecuencia

$$\hat{f}(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} I = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

Ejemplo 14.3.2. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g(x) = f(ax)$ entonces

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (14.11)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(ax) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $y = ax$

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\frac{y}{a}} f(y) \frac{1}{a} dy \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\frac{y}{a}} f(y) dy & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-is\frac{y}{a}} f(y) dy & \text{si } a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ -\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

■

Observación 14.3.3. Tomando $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $f(x) = e^{-x^2}$ tenemos

$$g(x) = f(ax) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y luego

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \sqrt{2}\hat{f}(\sqrt{2}s) \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{(\sqrt{2}s)^2}{4}} \\ &= e^{-\frac{s^2}{2}}\end{aligned}$$

Algunas transformadas de Fourier se resumen en la tabla 14.3.

	$f(x)$	$\hat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$
2	$e^{-a x }, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+s^2}$
3	$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
4	$\frac{1}{a^2+x^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a s }$
5	$\begin{cases} -k & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\text{sen}(as)}{s}$

Cuadro 14.1: Algunas transformadas de Fourier

14.4. Ejercicios

1. Calcule la transformada de Fourier de $f(x) = \cos(\pi x)/[x^3 - x^2 + 4x - 4]$.
2. Sea $f(x) = \exp(-a|x|)$, pruebe que la transformada de Fourier de f viene dada por

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}.$$

14.5. Problemas

Problema 14.1. Calcule la transformada de Fourier de $f(x) = \cos(\pi x)/[x^3 - x^2 + 4x - 4]$.

Problema 14.2. En cada caso, demuestre que la transformada de Fourier es la función indicada:

$$1. f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}.$$

$$3. f(x) = -a|x|, a > 0 \Rightarrow \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -k & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases} \Rightarrow \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k \operatorname{sen}(sa)}{s}.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \hat{f}(s) = \pi e^{-|s|}.$$

Problema 14.3. [Identidades de Plancherel y de Parseval]

(a) Demuestre, usando transformada de Fourier, la identidad de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{g(y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \overline{\hat{g}(s)} ds$$

(b) Deduzca la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

Suponga que las funciones f, g, \hat{f}, \hat{g} decaen lo suficientemente rápido en infinito de modo que todas las integrales que aparezcan sean convergentes.

Problema 14.4. [Teorema de Shannon]

Una función f se dice de *banda limitada* en s_0 , si:

$$\hat{f} = 0, \quad \forall s, \quad |s| > s_0 > 0$$

Teorema (Shannon): Sea f una función tal que existen su transformada y antitransformada de Fourier, continua, de banda limitada a $|s| < s_0$ y si $L = \frac{\pi}{s_0}$ entonces:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL) \frac{\operatorname{sen} s_0(x - nL)}{s_0(x - nL)}$$

Demuéstrelo, usando los siguientes pasos:

(a) Considere la familia de funciones $\hat{\phi}_n$ dadas por

$$\hat{\phi}_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| > s_0 \\ 2s_0^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{in\pi s}{s_0}} & \text{si } |s| \leq s_0 \end{cases}$$

y demuestre que la Transformada inversa para cada una de estas funciones esta dada por:

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2s_0}}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}$$

(b) Demuestre que la familia $\{\hat{\phi}_n(s)\}$ es una familia de funciones ortonormales, es decir, que el producto interno para funciones complejas entre $\hat{\phi}_n(s)$ y $\hat{\phi}_m(s)$ es cero si $n \neq m$ y es uno si $n = m$.

(c) Muestre que la familia $\{\hat{\phi}_n(s)\}$ permite escribir la función f como una serie de Fourier, cuyos coeficientes están en función de muestras de la función en intervalos de largo L , y concluya.

Parte IV

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Capítulo 15

Ecuaciones lineales de segundo orden

15.1. Ecuaciones parabólicas y fenómenos de difusión

15.1.1. Conducción del calor en una barra unidimensional

Consideraremos el problema de la difusión de calor en una barra delgada que se encuentra perfectamente aislada por su superficie lateral.

Si la barra es lo suficientemente delgada como para suponer que la temperatura es constante sobre cualquier sección transversal, el estado del sistema está descrito por una función escalar $u = u(t, x)$, la cual proporciona el valor de la temperatura de la barra al instante t y en la posición longitudinal x .

Supondremos que $u(t, x)$ y todas las otras funciones que utilizaremos son tan regulares como sea necesario para que ciertas expresiones que involucran sus derivadas estén bien definidas.

Es bien sabido que, en un cuerpo térmicamente conductor, el calor fluye desde las zonas de mayor temperatura hacia las de menor temperatura. Más aún, de acuerdo a la ley de Fourier, la rapidez a la cual el calor fluye entre zonas contiguas es proporcional a la diferencia de temperaturas por unidad de longitud, y el factor de proporcionalidad depende de las propiedades conductoras del cuerpo en cuestión.

Así, en el instante t , la rapidez con que el calor Q fluye desde un punto x hacia uno a su derecha, digamos $x + \delta x$ con $\delta x \ll 1$, puede aproximarse por

$$\frac{dQ}{dt} \approx k(x) \frac{u(t, x) - u(t, x + \delta x)}{\delta x},$$

donde $k = k(x) > 0$ es un coeficiente de *conductividad térmica* que depende del material del cual está hecho la barra. En el límite se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} = k(x) \left(- \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{u(t, x + \delta x) - u(t, x)}{\delta x} \right) = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x).$$

Notemos que $dQ/dt > 0$ cuando $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) < 0$. Esto es consistente pues si $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) < 0$ entonces la temperatura es (localmente) decreciente, de modo que su valor es menor a la derecha del

punto x , y por lo tanto el calor fluye hacia la derecha. Análogamente, si $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) > 0$ entonces el valor de la temperatura es mayor a la derecha del punto x , y por lo tanto el calor fluye hacia la izquierda, esto es, $dQ/dt < 0$.

Sea (x_1, x_2) , con $x_1 < x_2$, un intervalo de observación correspondiente a una sección longitudinal de la barra. Sea (t_1, t_2) , con $t_1 < t_2$, un intervalo correspondiente a un lapso de tiempo. Como la barra está térmicamente aislada por su superficie lateral, el intercambio de calor sólo ocurre a través de los puntos extremos x_1 y x_2 del intervalo (x_1, x_2) . En virtud de lo anterior, la cantidad neta de calor Q_1 que entra a la sección (x_1, x_2) en el lapso (t_1, t_2) está dada por

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} [-k(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1) + k(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_2)] dt.$$

Pero, usando el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$k(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_2) - k(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)] dx,$$

y en consecuencia

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)] dx dt.$$

Al interior de la barra puede haber una *fente de calor*, cuya tasa de producción de calor por unidad de tiempo y de longitud está dada por una función $F = F(t, x)$. Por lo tanto, la cantidad neta de calor producida en el segmento (x_1, x_2) durante el lapso (t_1, t_2) está dada por

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(t, x) dx dt.$$

Por otra parte, la cantidad de calor que entra al segmento (x_1, x_2) , junto con el que se produce en su interior, provocará un cambio en la distribución de temperatura sobre dicho segmento en el lapso de tiempo que va de t_1 a t_2 . La cantidad de calor por unidad de longitud necesaria para un cambio $\delta u = u(t_2, x) - u(t_1, x)$ de la temperatura en el punto x está dada por

$$c(x)[u(t_2, x) - u(t_1, x)],$$

donde el factor de proporcionalidad $c = c(x) > 0$ es la *capacidad calorífica específica*¹. Luego, la cantidad de calor total necesaria para el cambio de temperatura en el segmento (x_1, x_2) es

$$Q_3 = \int_{x_1}^{x_2} c(x)[u(t_2, x) - u(t_1, x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dt dx,$$

y éste debe ser igual a la cantidad neta de calor que entra y que se produce en el segmento (x_1, x_2) durante el lapso (t_1, t_2) , esto es,

$$Q_3 = Q_1 + Q_2.$$

¹Densidad de capacidad calorífica por unidad de longitud.

Más explícitamente,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] + F(t, x) \right] dx dt.$$

De la arbitrariedad de los puntos $x_1 < x_2$ y $t_1 < t_2$, un argumento clásico de localización² permite concluir que $u = u(t, x)$ necesariamente satisface la ecuación en derivadas parciales

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(t, x).$$

Si la barra es de material *homogéneo*, es decir, $k(x) = k$ y $c(x) = c$ se obtiene

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(t, x), \tag{15.1}$$

donde $\alpha = k/c$, $f = F/c$, y, con el fin de simplificar la notación, hemos utilizado las notaciones

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Al coeficiente $\alpha > 0$ se le llama *difusividad térmica* del material.

15.1.2. Conducción del calor en un cuerpo

En esta sección deduciremos la ecuación del calor en el caso general de un material ocupando una cierta región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, que suponemos abierta y no vacía. Denotemos por $u(t, x, y, z)$ la temperatura del material en el punto $(x, y, z) \in \Omega$ y el tiempo t . Supondremos que la función

$$u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es suficientemente regular.

Un modelo sencillo pero válido en muchas situaciones, conocido como la ley de Fourier, supone que la cantidad de calor δQ que atraviesa un elemento de superficie δA orientada según el campo de normales \hat{n} , en un lapso de tiempo δt viene dado por

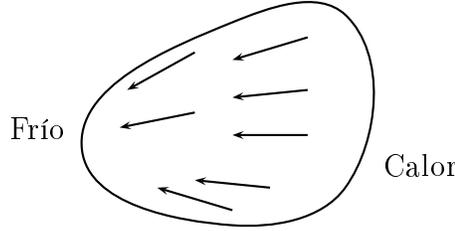
$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -k \nabla u \cdot \hat{n} \delta A,$$

donde

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix},$$

es decir ∇u es el gradiente de u con respecto a las variables espaciales. $k > 0$ denota el coeficiente de conducción térmica del material. Observemos que dado que k es positivo, el calor fluye de zonas de alta temperatura a zonas de baja temperatura, pues $-\nabla u$ es la dirección de máximo descenso de la función u .

²Por ejemplo, considere t_2 y x_2 como variables y derive la expresión con respecto a t_2 y x_2 sucesivamente, "eliminando" así la integral temporal primero y la espacial después.



Sea $\omega \subset \Omega$, es decir, $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega \subset \Omega$, y realicemos un balance de calor en esta zona, suponiendo inicialmente que no hay fuentes de calor dentro del cuerpo. De acuerdo a la ley de Fourier, la cantidad de calor que fluye a través de la frontera de ω hacia el exterior (flujo neto de calor que sale de ω) viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} &= - \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot \hat{n} dA \\ &= - \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

y haciendo $\delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}.$$

Por otra parte existe una relación entre la cantidad de calor q almacenada en el elemento de volumen δV y la temperatura en esta región:

$$q = c u \rho \delta V,$$

donde c es el calor específico y ρ es la densidad del material. Derivando con respecto a t se deduce que la variación de la cantidad de calor por unidad de tiempo en δV es

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta V.$$

De este modo la variación de calor almacenado en ω por unidad de tiempo es

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\omega} \frac{\partial q}{\partial t} dV = \iiint_{\omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV.$$

Si no hay fuentes de calor en Ω entonces la variación de calor en ω por unidad de tiempo es igual a la cantidad de calor que entra en ω por unidad de tiempo. De lo anterior se obtiene

$$\iiint_{\omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}.$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S} = \iiint_{\omega} \operatorname{div}(k \nabla u) dV,$$

y se deduce que

$$\iiint_{\omega} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) \right) dV = 0.$$

Esto último es válido para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Por un argumento de localización, si todas las funciones en el integrando son continuas, se concluye

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) = 0 \quad \text{sobre } [0, T] \times \Omega,$$

que es la ecuación del calor para un cuerpo general. Si el cuerpo es homogéneo, es decir $c(x, y, z) = c_0$, $\rho(x, y, z) = \rho_0$ y $k(x, y, z) = k_0$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k_0}{c_0\rho_0} \operatorname{div}(\nabla u) = 0.$$

Definiendo $\alpha = \frac{k_0}{c_0\rho_0}$ y recordando que

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

llegamos a la ecuación del calor para un cuerpo homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0 \quad \text{sobre } [0, T] \times \Omega, \quad (15.2)$$

donde $\alpha > 0$ es una constante. Aquí Δ el operador Laplaciano con respecto a las variables espaciales.

La ecuación del calor se complementa con condiciones de borde adicionales, que serán explicitadas en la sección 15.4.

Cuando en el interior del cuerpo hay fuentes distribuidas generadoras de calor, esto suele modelarse mediante una función densidad por unidad de volumen

$$\begin{aligned} f &: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, x, y, z) &\rightarrow f(t, x, y, z), \end{aligned}$$

de modo que el calor instantáneo generado en una subregión $\omega \subset \Omega$ está dado por

$$\iiint_{\omega} f(t, \vec{r}) dV(\vec{r}).$$

Suponiendo que f es continua y retomando lo que se hizo anteriormente, se deduce que

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) = f \quad \text{en } [0, T] \times \Omega,$$

en el caso general no homogéneo. En el caso homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = \frac{f}{c_0\rho_0} \quad \text{en } [0, T] \times \Omega.$$

15.1.3. Expansión de un gas en un medio isótropo y homogéneo

Supongamos que un gas ocupa una región porosa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en la cual se mueve de puntos de alta concentración a baja concentración, proceso que se denomina difusión. Denotemos por $u(t, x, y, z)$ la concentración del gas en el instante t y el punto (x, y, z) . Entonces bajo la *ley de Nernst* y suponiendo que el material es homogéneo e isotrópico, se puede verificar que u satisface

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{en } \Omega, \quad (15.3)$$

donde a es una constante. La ley de Nernst es análoga a la ley de Fourier para la conducción de calor.

15.2. Ecuaciones hiperbólicas y fenómenos oscilatorios

15.2.1. Oscilaciones de una cuerda

Consideremos una cuerda elástica de longitud L sometida a una cierta tensión y cuyo movimiento se confina a un plano. Modelaremos la cuerda como una curva y por simplicidad supondremos que ésta se puede representar en cada instante t como el grafo de una función $u(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, u es una función de dos variables

$$u : [0, T] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Con el objeto de simplificar la derivación de la ecuación que satisface u haremos los siguientes supuestos:

1. las oscilaciones de la cuerda son pequeñas y cada punto de ésta se mueve verticalmente,
2. la cuerda está sometida a una tensión cuya componente horizontal $\tau > 0$ es constante y uniforme
3. las fuerzas de fricción pueden ser despreciadas,
4. en una primera aproximación despreciaremos el efecto de fuerzas externas como la gravedad.

Dado $x \in (0, L)$ y $\delta x > 0$ denotemos por α el ángulo entre la cuerda y el eje x en el punto $(x, u(x))$ y por α' el ángulo en $(x + \delta x, u(x + \delta x))$. Llamemos τ_1 a la tensión de la cuerda en $(x, u(x))$ y τ_2 a la tensión en $(x + \delta x, u(x + \delta x))$. Realicemos un balance de fuerza en el segmento de cuerda correspondiente a $(x, x + \delta x)$. Como suponemos que el movimiento de la cuerda es vertical no hay aceleración horizontal, es decir

$$\tau_1 \cos \alpha = \tau_2 \cos \alpha' = \tau. \quad (15.4)$$

Por otro lado, en la dirección vertical

$$\tau_2 \sin \alpha' - \tau_1 \sin \alpha = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde ρ es la densidad lineal de masa de la cuerda, que supondremos constantes, y δl es la longitud de ésta entre x y $x + \delta x$. Dividiendo ambos lados por τ y utilizando (15.4) obtenemos

$$\tan \alpha' - \tan \alpha = \frac{\rho}{\tau} \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (15.5)$$

Pero $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_x$ y $\tan \alpha' = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\delta x}$, por lo que, dividiendo la ecuación anterior por δx y haciendo $\delta x \rightarrow 0$ encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde hemos utilizado $\frac{\delta l}{\delta x} \rightarrow 1$ cuando $\delta x \rightarrow 0$. Si se quiere incorporar el efecto de fuerzas externas, de manera análoga se puede verificar que u satisface

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(t, x), \quad (15.6)$$

donde $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} > 0$, $F(t, x) = \frac{1}{\tau} f(x, t)$ y $f(x, t)$ es la densidad lineal de fuerzas externas.

Las condiciones adicionales naturales para complementar esta ecuación son de dos tipos:

1. Condiciones iniciales en un instante $t = 0$ que describen la posición y velocidad de la cuerda en cada punto $x \in [0, L]$. Es decir,

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, L],$$

y

$$u_t(0, x) = v_0(x) \quad \forall x \in [0, L].$$

2. Condiciones de borde sobre los puntos 0 y L .

Observemos que a diferencia de las ecuaciones parabólicas, desde un punto de vista físico al menos, es necesario en las ecuaciones hiperbólicas imponer condiciones iniciales sobre u y u_t .

Las condiciones de borde deben reflejar las condiciones físicas a las que está sujeta la cuerda y pueden ser de varios tipos. Por ejemplo, una condición de borde de la forma

$$u(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

quiere decir que el extremo $x = 0$ de la cuerda está fijo a una altura 0. Otro ejemplo es

$$u_x(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (15.7)$$

que significa que el extremo $x = 0$ está libre. En efecto, retomando (15.5) con $x = 0$ y si suponemos que la componente vertical de la fuerza neta en $x = 0$ vale cero, vemos que

$$\tau_2 \sin \alpha' = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Usando que $\tau_2 \sin \alpha' \sim \tau \frac{\partial u}{\partial x}|_{\delta x}$ y haciendo $\delta x \rightarrow 0$ resulta (15.7).

Una tercera posibilidad es

$$u(t, 0) = \frac{1}{h} u_x(t, 0) \quad \forall t \in [0, T] \quad (15.8)$$

que modela la situación en que el extremo $x = 0$ está sujeto a un resorte de constante elástica $k = h\tau$. En esta situación

$$\tau_2 \sin \alpha - (\text{fuerza ejercida por el resorte en } x = 0) = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

es decir

$$\tau_2 \sin \alpha - ku|_{x=0} = \rho \delta l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nuevamente, haciendo $\delta x \rightarrow 0$ encontramos (15.8)

15.2.2. Oscilaciones de una membrana

El caso de las oscilaciones de una membrana es muy similar al de las oscilaciones de una cuerda. Veamos brevemente cómo encontrar la EDP en esta situación.

La membrana se modela como una superficie en \mathbb{R}^3 y por simplicidad supondremos que esta superficie se puede representar mediante una función

$$u(t, x, y) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

de modo tal que en cada instante t la membrana corresponde a la superficie parametrizada por $(x, y) \mapsto u(t, x, y)$. Nuevamente suponemos

1. las oscilaciones de la membrana son pequeñas y cada punto de ésta se mueve verticalmente,
2. la membrana está sometida a una tensión superficial $\tau > 0$ constante y uniforme
3. las fuerzas de fricción pueden ser despreciadas,
4. en una primera aproximación despreciaremos el efecto de fuerzas externas como la gravedad.

Sean $(x, y) \in \Omega$ y $\delta x > 0$, $\delta y > 0$. Estudiemos las fuerzas que actúan sobre la porción de la membrana sobre el cuadrado $[x, x + \delta x] \times [y, y + \delta y]$. Haciendo un balance de las fuerzas verticales y utilizando las mismas aproximaciones que en la sección 15.2.1 podemos escribir

$$\begin{aligned} (\text{contribución de las aristas paralelas al eje } x) &= \tau \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\delta y} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right) \\ (\text{contribución de las aristas paralelas al eje } y) &= \tau \delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) \end{aligned}$$

Luego por la ley de Newton

$$\rho \delta x \delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\delta y} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right) + \tau \delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right),$$

donde ρ es la densidad superficial de masa. Dividiendo por $\delta x \delta y$ y haciendo $\delta x \rightarrow 0$ y $\delta y \rightarrow 0$ encontramos

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) = c^2 \Delta u$$

donde $c = \sqrt{\tau/\rho}$ y $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ es el Laplaciano de u con respecto a las coordenadas espaciales.

Si hay fuerzas externas actuando en la membrana, análogamente se encuentra

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + F(t, x, y) \quad (15.9)$$

donde $F(t, x, y) = \frac{1}{\tau} f(t, x, y)$ y $f(t, x, y)$ es la densidad superficial de fuerzas externas actuando sobre la membrana.

15.2.3. Vibraciones longitudinales de una barra

Consideremos una barra delgada de un material elástico de longitud L y supongamos que el origen está ubicado en uno de los extremos. Las deformaciones longitudinales de esta barra las describimos mediante una función $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo tal que si una partícula que ocupa inicialmente (en una situación de equilibrio) la posición $x \in [0, L]$, en el instante t se sitúa en $x + u(x, t)$.

Modelando la barra como una familia de N resortes con masas y constantes elásticas idénticas, y luego considerando $N \rightarrow \infty$, es posible deducir que u satisface la siguiente EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) \quad x \in (0, L), t \in (0, T),$$

donde $c > 0$ depende de las propiedades de la barra (densidad de masa y constante elástica), y f es (excepto por una constante) una densidad lineal de fuerzas externas.

15.3. Ecuaciones elípticas y fenómenos estacionarios

15.3.1. Membrana en reposo

Retomando la sección 15.2.2, si la membrana está en reposo de (15.9) vemos que la función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ debe satisfacer la ecuación

$$\Delta u + F(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (15.10)$$

que se conoce como la *ecuación de Poisson*.

En el caso particular cuando $F = 0$, se obtiene la *ecuación de Laplace*

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (15.11)$$

Una función que es solución de la ecuación de Laplace se dice una función armónica.

15.3.2. Potencial de campo eléctrico

En esta sección escribiremos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. El campo eléctrico generado por una cantidad finita de cargas q_j con ubicadas en los puntos \vec{y}_j viene dada por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}_j}{\|\vec{x} - \vec{y}_j\|^3},$$

donde ϵ_0 la permitividad del vacío.

Es fácil verificar que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ y por lo tanto existe una función escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Cuando las cargas se distribuyen continuamente de acuerdo a una densidad volumétrica $\rho(\vec{y})$ el campo eléctrico en un punto \vec{x} cualquiera se puede escribir

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{y}. \quad (15.12)$$

Para dar sentido a esta integral supondremos que $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y que $\rho(\vec{y}) = 0$ si $\|\vec{y}\| \geq R_0$, donde $R_0 > 0$ es una constante. Notemos que se trata de una integral impropia pero convergente (el integrando se indefine en $\vec{y} = \vec{x}$).

El campo eléctrico (15.12) también proviene de un potencial, es decir,

$$\vec{E} = -\nabla\phi. \quad (15.13)$$

Más aún, se puede dar una fórmula *explícita* para ϕ

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d\vec{y}.$$

Sea $\omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto acotado no vacío cuya frontera $\partial\omega$ es una superficie regular. Queremos calcular el flujo de \vec{E} a través de $\partial\omega$, es decir

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\omega} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{y} \right) d\vec{S}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \left(\iint_{\partial\omega} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{S}(\vec{x}) \right) d\vec{y}. \end{aligned}$$

Utilizando apropiadamente el teorema de Gauss se puede probar que

$$\iint_{\partial\omega} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d\vec{S}(\vec{x}) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{y} \in \omega \\ 0 & \text{si } \vec{y} \notin \omega. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\iint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\omega} \rho(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Aplicando el teorema de la divergencia al campo \vec{E} y recordando (15.13) obtenemos

$$\iiint_{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\omega} \rho dV = 0$$

es decir

$$\iiint_{\omega} \left(\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right) dV = 0.$$

Como lo anterior se tiene para todo ω , se concluye que el integrando debe ser nulo, es decir

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (15.14)$$

Notemos que esta ecuación es una Poisson (15.10) y en ausencia de carga ésta última queda como

$$\Delta\phi = 0$$

la cual resulta ser una ecuación de Laplace (15.11).

Hemos visto que estas dos últimas ecuaciones modelan diversos sistemas físicos. Lo que diferencia un problema de otro es el significado físico de las variables y las condiciones iniciales y de bordes, tema a tratar en la siguiente sección.

15.4. Condiciones iniciales y de borde

En esta sección veremos cómo complementar las ecuaciones en derivadas parciales antes mencionadas, es decir, daremos condiciones que definen y caracterizan los problemas.

En todos los ejemplos anteriores, la situación física se describe mediante una variable de estado o función u que puede ser escalar o vectorial y que depende de variables *espaciales* $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ o 3) y en algunos casos u depende de una variable adicional t que se interpreta como el tiempo. Este es el caso en los problemas que llamamos de evolución como las ecuaciones parabólicas de la sección 15.1 y las hiperbólicas de sección 15.2. En esta situación supondremos que $t \in [t_0, T]$.

Las EDP's se complementan básicamente con dos tipos de condiciones adicionales:

■ Condiciones de borde

Estas condiciones aparecen tanto en problemas de evolución como en ecuaciones estacionarias. Hay diversas alternativas según el sistema físico que se esté modelando.

- Condición de borde tipo Dirichlet

Supongamos, para fijar ideas, que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y denotemos por $\partial\Omega$ la frontera de este conjunto. De esta forma, en el caso en que u no depende de t la condición de borde de tipo Dirichlet viene dada por

$$u(x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \partial\Omega$$

y si u depende de t

$$u(t, x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \partial\Omega \text{ y todo } t \in [t_0, T],$$

donde

$$g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{es una función conocida}$$

En el caso más general g puede depender del tiempo.

- Condiciones de borde de tipo Neumann

Las condiciones de este tipo se caracterizan por venir representadas de la forma

$$\nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(t, \cdot) = h(\cdot) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \forall t \in [t_0, T]$$

donde \hat{n} representa la normal exterior a Ω y donde $h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida (dato). En un caso más general h puede depender del tiempo.

- Condiciones mixtas

Esta clase de condiciones vienen caracterizadas por combinaciones de condiciones del tipo Dirichlet y Neumann sobre porciones de la frontera.

■ Condiciones iniciales

En lo que respecta a las condiciones iniciales, éstas tienen sentido sólo en problemas de evolución y se dan en un instante t_0 con el objeto de describir el campo tratado (campo de temperaturas, campo eléctrico, etc.) en t_0 sobre todo Ω . La condición inicial viene típicamente dada por algo del tipo

$$u(t_0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega,$$

donde $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es dato.

Cabe destacar que habrá que imponer tantas condiciones iniciales como el orden de la derivada temporal de u en la ecuación, es decir, si en la ecuación que describe el proceso estudiado aparece la segunda derivada temporal de u , se tendrá que imponer dos condiciones iniciales. Una de estas será como la antes mencionada y la segunda usualmente tendrá relación con la primera derivada temporal de la función en el instante t_0 , por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x, y, z) = v_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

y así sucesivamente, donde la función v_0 es dato.

Por ejemplo, en el caso de la conducción del calor en una región Ω de \mathbb{R}^3 (ver la sección 15.1.2), donde u representa la distribución de temperaturas, la condición de borde tipo Dirichlet corresponde al caso en que esta distribución se conoce sobre la frontera del dominio. Por otro lado, en la condición de borde tipo Neumann es el flujo de calor puntual el que constituye un dato. Más precisamente, recordemos que el flujo de calor por unidad de área y tiempo está dado por

$$-k\nabla u \cdot \hat{n} = -k \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = -kh,$$

donde $h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida y k representa la conductividad térmica.

15.5. Otras ecuaciones de la física

1. Ecuación de Navier-Stokes

En dinámica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto no lineal de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el movimiento del fluido en cuestión. Estas se encuentran considerando la masa, el momentum y balances de energía para un elemento de volumen infinitesimal en movimiento, sobre el cual se pueden producir tensiones tangenciales (debido a la viscosidad).

Sea $\vec{u}(x, y, z, t)$ el campo de velocidades del fluido y $p(x, y, z, t)$ la presión. Luego la ecuación para fluidos compresibles viene dada por

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad del fluido, F es la densidad volumétrica de fuerzas externas (por ejemplo la gravedad), ρ es la densidad y $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ es la aceleración del elemento de fluido, también conocida como *derivada material*, la cual viene expresada por

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u},$$

o por componentes, escribiendo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, la componente i -ésima de $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ viene dada por

$$\left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right]_i = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial z}.$$

En los fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad es $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, y, por consiguiente la ecuación anterior se reduce a

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}.$$

2. Ecuación de Schrödinger para una partícula

En mecánica cuántica existe lo que se denomina la dualidad ente ondas y partículas. La descripción de una partícula viene dada por una función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ que tiene valores

en los números complejos, es decir $\Psi(\vec{r}, t) \in \mathcal{C}$ y $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \overline{\Psi(\vec{r}, t)}\Psi(\vec{r}, t)$ se interpreta como la función densidad de probabilidad de encontrar la partícula en la posición \vec{r} en el instante t .

De la teoría de la mecánica cuántica se deduce que la función Ψ debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (15.15)$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula y V es una función que representa el potencial al cual está sometido la partícula. El Laplaciano en esta ecuación es solamente con respecto a las variables espaciales y por eso la notación $\Delta_{\vec{r}}$. Usualmente esta ecuación se acompaña de la condición (probabilística)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1.$$

Notemos que (15.15) representa un sistema de dos ecuaciones reales en derivadas parciales, siendo las incógnitas las partes real e imaginaria de Ψ .

3. Ecuaciones de Maxwell

En la teoría de electromagnetismo, existen cuatro ecuaciones fundamentales que permiten visualizar lo que sucede con el campo eléctrico \vec{E} , el vector desplazamiento \vec{D} , el flujo eléctrico \vec{J} y el campo magnético \vec{B} . Estas ecuaciones son las ecuaciones de Maxwell, las cuales son

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

donde μ_0 es una constante (la permeabilidad del vacío). Estas ecuaciones suelen complementarse con leyes constitutivas para formar lo que se denomina un sistema cerrado de ecuaciones.

Cada una de estas ecuaciones entrega información sobre los campos tratados, por ejemplo de la tercera ecuación se puede concluir que \vec{B} genera \vec{E} (de donde se deduce la ley de inducción). De este set también se puede concluir que las líneas de campo magnético son cerradas, el flujo de \vec{B} es conservativo y así sucesivamente.

15.6. Principio de superposición

Recordemos brevemente la noción del principio de superposición para ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.). Consideremos una E.D.O. lineal descrita por

$$Ly = 0 \quad \text{en un intervalo } I = (a, b)$$

donde $L : C^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ es un operador diferencial lineal de orden n . El principio de superposición dice que: “ Toda combinación lineal finita de soluciones de una E.D.O. lineal homogénea, es también solución”, es decir

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \text{Ker}(L) \Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2 \in \text{Ker}(L)$$

o también

$$Ly_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow L \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) = 0$$

La noción de operadores diferenciales lineales es fácilmente extendible al caso de operadores actuando sobre funciones de varias variables, es decir sobre funciones $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Por ejemplo consideremos el operador $L = \Delta$ (Laplaciano) que actúa $L : C^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ mediante $Lu = \Delta u$. En este contexto se amplía la teoría y se puede demostrar que el principio de superposición es también válido para las E.D.P.'s lineales.

Al igual que en ecuaciones diferenciales ordinarias las soluciones de una EDP lineal no homogénea se pueden descomponer en una solución de la homogénea y una solución particular.

15.7. La ecuación de superficies mínimas

En esta sección presentamos una deducción de la ecuación de superficies mínimas como un ejemplo de una ecuación no lineal.

La ecuación (15.10) que modela una membrana en reposo se dedujo suponiendo que las deformaciones son pequeñas. Es interesante estudiar la ecuación resultante sin hacer esta hipótesis, lo que por simplicidad haremos en el caso que no hay fuerzas externas. Supondremos que la membrana es elástica, que está en equilibrio de fuerzas y está sometida a una tensión T que es constante. Con el fin de utilizar esta información imaginamos que “cortamos” una parte de la membrana, obteniendo una (pequeña) superficie S cuya frontera ∂S es una curva cerrada en \mathbb{R}^3 . Denotemos por $\hat{\tau}$ el vector tangente a ∂S y por \hat{n} el vector normal unitario a S orientado en dirección del eje z . Dado que $(x, y) \mapsto u(t, x, y)$ parametriza S , podemos escribir

$$\hat{n} = \frac{1}{\|\hat{n}\|} \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\|\hat{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Orientemos $\hat{\tau}$ de modo que sea consistente con la orientación de S para el teorema de Stokes. De este modo el vector

$$\hat{\tau} \times \hat{n},$$

apunta fuera de S , es perpendicular a $\hat{\tau}$ y tangente a la membrana. Sobre S actúa una fuerza a lo largo de ∂S ejercida por el complemento de ésta que viene dada por

$$T(\hat{\tau} \times \hat{n}).$$

De este modo, la fuerza neta sobre S que le ejerce el resto de la membrana es

$$\vec{F} = \int_{\partial S} T(\hat{\tau} \times \hat{n}) dr.$$

Sea \hat{e} un vector (constante) unitario en \mathbb{R}^3 . Entonces

$$\vec{F} \cdot \hat{e} = T \int_{\partial S} (\hat{\tau} \times \hat{n}) \cdot \hat{e} dr = T \int_{\partial S} (\hat{n} \times \hat{e}) \cdot \hat{\tau} dr.$$

Empleando el teorema de Stokes y la notación

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \hat{e} &= T \iint_S [\vec{\nabla} \times (\hat{n} \times \hat{e})] \cdot \hat{n} dA = T \iint_S [(\vec{\nabla} \cdot \hat{e})\hat{n} - (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{e}] \cdot \hat{n} dA \\ &= -T \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})(\hat{e} \cdot \hat{n}) dA = -T\hat{e} \cdot \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} dA. \end{aligned}$$

Luego

$$\vec{F} = -T \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} dA.$$

Pensando en δS como una pequeña superficie en torno a punto (x_0, y_0, z_0) de área δA , escribamos como $\delta \vec{F}$ la fuerza ejercida por el resto de la membrana sobre δS , esto es

$$\delta \vec{F} = -T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} \delta A + o(\delta A).$$

Si no hay fuerzas externas actuando sobre la membrana, como ésta está en reposo la ley Newton establece que

$$\delta \vec{F} = 0$$

y por lo anterior

$$-T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} \delta A + o(\delta A) = 0.$$

Dividiendo por δA y haciendo $\delta A \rightarrow 0$ obtenemos

$$-T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} = 0.$$

Recordemos que u no depende de z , por lo que

$$-\vec{\nabla} \cdot \hat{n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right),$$

donde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Luego la ecuación para u queda

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = 0. \quad (15.16)$$

Esta ecuación se conoce también como la *ecuación de superficies mínimas*.

La relación entre la ecuación (15.16) y la ecuación de Laplace (15.11) es que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede aproximar $\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$ por 1, y en este caso (15.16) se reduce a

$$\Delta u = 0.$$

15.8. Problemas

Problema 15.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto conexo por caminos de frontera regular $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Considere la ecuación del calor en régimen estacionario con condiciones de borde mixtas.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = T_0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u & \text{sobre } \Sigma_2 \end{cases} \quad (\text{ECM})$$

donde $\alpha > 0$ y $T_0 \geq 0$ son constantes conocidas.

(a) Pruebe que en el caso $T_0 = 0$ se tiene $u \equiv 0$ en todo Ω . Indicación pruebe que

$$\iiint_{\Omega} \|u\|^2 dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0.$$

(b) Deduzca que la ecuación (ECM) posee a lo más una solución.

(c) Resuelva (ECM) para el caso $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid a < \|\vec{r}\| < b\}$ con $0 < a < b$, $\Sigma_1 = S(0, a)$ y $\Sigma_2 = S(0, b)$. Indicación: suponga que la solución tiene simetría esférica.

Problema 15.2.³ Una cañería cilíndrica de longitud L y radios $a < b$, conduce un líquido a temperatura T_1 mayor que la temperatura exterior T_0 . Suponiendo conductividad térmica k constante y simetría cilíndrica, se desea determinar el régimen estacionario de temperatura $T(\rho, \theta, z) = T(\rho)$.

³Control 2. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas.

- (a) Para $\rho \in [a, b]$ considere el flujo de calor

$$\Phi(\rho) := \iint_{\Sigma(\rho)} k \nabla T \cdot d\vec{A}$$

a través del manto del cilindro de radio ρ y longitud L , $\Sigma(\rho)$ (sin tapas, concéntrico a la cañería, orientado exteriormente). Use el Teorema de la Divergencia para probar que $\Phi(\rho)$ es constante e igual a $\Phi(b)$.

- (b) Deducir que $\rho \partial T / \partial \rho$ es constante y encontrar una expresión analítica para $T(\rho)$ en función de T_1, T_0, a, b .
- (c) Probar que $\Phi(b) = 2\pi L k (T_0 - T_1) / \ln(b/a)$.
- (d) Suponga ahora que la cañería se recubre por un material aislante (conductividad térmica \bar{k} conocida) hasta un radio $c > b$. Considerando la temperatura T_b en la interfaz como un parámetro, use la conservación de flujo para determinar T_b y compruebe que el flujo de calor $\Phi(b)$ es menor que en el caso no-aislado.

Problema 15.3. ⁴ Una esfera de radio $R > 0$ posee un núcleo de radio $a < R$ el cual se encuentra a una temperatura T_a , mayor que la temperatura T_0 de la superficie. Suponemos que la distribución de temperatura u entre el núcleo y la superficie tiene simetría radial, vale decir $u = u(r, t)$.

- (a) Muestre que $u(r, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t) = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) \right).$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es la conductividad térmica de la esfera.

- (b) Utilizando el cambio de escala $u(r, t) = v(r, t)/r$, compruebe que la nueva función $v(r, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r, t) = k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, t).$$

- (c) Deduzca una expresión analítica para la distribución de temperatura en régimen permanente (en términos de r, k, a, R, T_0, T_a), y grafique la función $u(r)$ que resulta.

Problema 15.4. En una cuerda de largo L que está vibrando, para cada $x \in [0, L]$ y $t \geq 0$, la función $u(x, t)$ denota el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x y en el instante t .

- (a) Proporcione una interpretación física o geométrica, según corresponda, de cada una de las siguientes funciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

- (b) Considere la ecuación en derivadas parciales que gobierna el movimiento de la cuerda vibrante de dimensión uno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (15.17)$$

⁴Control 2. Primavera 1996. Matemáticas Aplicadas. Prof. Felipe Álvarez

- (i) Muestre que $u(x, t) = 2 \operatorname{sen}(2x) \cos(2\pi t)$ satisface la ecuación (15.17) con $c = \pi$.
- (ii) Sean $\phi, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2 . Muestre que $u(x, t) = \phi(x + ct) + \varphi(x - ct)$ es solución de la ecuación de ondas (15.17).
- (iii) Encuentre las funciones ϕ y φ en el inciso (i).
Indicación: Recuerde que $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
- (iv) Si además $u(x, 0) = g(x)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, muestre que

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2}$$

Indicación: De las condiciones iniciales, obtenga un sistema para ϕ y φ .

15.9. Solución de problemas

Solución Problema 15.1

- (a) Consideremos la ecuación $\Delta u = 0$ multiplicando por u y luego integrando se tiene

$$\iiint_{\Omega} u \Delta u \, dV = 0 \quad (15.18)$$

integrando por partes

$$\iiint_{\Omega} u \Delta u \, dV = \iint_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot d\vec{A} - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dV$$

pero notemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot d\vec{A} &= \iint_{\Sigma_1} u \nabla u \cdot d\vec{A} + \iint_{\Sigma_2} u \nabla u \cdot d\vec{A} \\ &= 0 + \iint_{\Sigma_2} u \nabla u \cdot \hat{n} \, dS \\ &= \iint_{\Sigma_2} u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = -\alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 \, dS \end{aligned}$$

reemplazando este resultado en la ecuación (15.18) se demuestra la indicación.

Para concluir, notemos que la ecuación

$$\iiint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 \, dA = 0$$

nos asegura que $\nabla u = 0$ en Ω y $u = 0$ en $\partial\Omega$. En efecto como $\|\nabla u\|^2 \geq 0 \, \forall x \in \Omega$, $u^2 \geq 0 \, \forall x \in \partial\Omega$, y $\alpha > 0$ por la indicación se tiene que necesariamente $\|\nabla u\|^2 = 0 \, \forall x \in \Omega$

y $u^2 = 0 \forall x \in \partial\Omega$ salvo quizás por una cantidad finita de puntos, sin embargo dada la continuidad de las funciones $\|\cdot\|$, ∇u y u podemos concluir que $\nabla u = 0 \forall x \in \Omega$ y $u = 0 \forall x \in \partial\Omega$.

Como $\nabla u = 0 \forall x \in \Omega$ y Ω es **conexo** necesariamente u es constante en Ω , dada la continuidad de u (pedimos solución al menos de clase \mathcal{C}^2) y el hecho que u vale 0 en Σ_2 necesariamente $u = 0$ en Ω .

- (b) Supongamos u y v soluciones de (ECM) y llamemos $h = u - v$ claramente se tiene que $\Delta h = 0$ en Ω , $h = 0$ sobre Σ_2 y $\frac{\partial h}{\partial n} = -\alpha h$ sobre Σ_1 . Así h cumple (ECM) con $T_0 = 0$ y entonces por la parte anterior se tiene que $h = 0$ en Ω lo que implica que $u = v$.
- (c) Asumiendo que la solución posee simetría esférica (es decir u solo depende de r) se obtiene que

$$\Delta u = 0 \iff \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (15.19)$$

El alumno tiene que verificar este cálculo.

La fórmula (15.19) es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución está dada por

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Para encontrar los valores de las constantes C_1 y C_2 veremos como se comporta u en la frontera. Evaluando u en $r = a$ (i.e. sobre Σ_1)

$$u(a) = T_a = \frac{C_1}{a} + C_2$$

ahora derivando con respecto a r y evaluando en $r = b$ (i.e. sobre Σ_2)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(b) = -\frac{C_1}{b^2} = -\alpha \left(\frac{C_1}{b} + C_2 \right)$$

El alumno debe justificar este cálculo, es decir debe argumentar que para este problema la normal exterior corresponde a \hat{r} y por lo tanto $\nabla u \cdot n$ coincide con $\frac{\partial u}{\partial r}$ y por las condiciones de borde se tiene que esto último es igual a $-\alpha u(b)$. resolviendo el sistema lineal

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{C_1}{a} + C_2 \\ \frac{C_1}{b^2} &= \alpha \left(\frac{C_1}{b} + C_2 \right) \end{aligned}$$

se obtienen los valores de C_1 y C_2

Capítulo 16

Separación de Variables

16.1. Ejemplo modelo: ecuación del calor

Consideremos el problema de difusión de calor en una barra delgada de longitud $L > 0$, compuesta por un material homogéneo e isotrópico de coeficiente de difusividad térmica $\alpha > 0$, y que se encuentra perfectamente aislada por su superficie lateral, y sin fuentes de calor externas actuando dentro de la barra, es decir $f(x) = 0$ en (15.1). Tal como se dedujo en la sección 15.1.1, la EDP que modela esta situación es

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (16.1)$$

La incógnita $u = u(t, x)$ es la temperatura al instante t y en la posición x sobre la barra. Si suponemos que sus extremos se mantienen a temperatura constante igual a 0, entonces u satisface la condición de borde de tipo Dirichlet homogéneo

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad t > 0. \quad (16.2)$$

Consideraremos además la condición inicial

$$u(0, x) = f(x) \quad 0 < x < L. \quad (16.3)$$

Para resolver (16.1) bajo (16.2) y (16.3), aplicaremos el *método de separación de variables*, el que describiremos detalladamente a continuación.

16.1.1. Primera etapa: separar variables

El método se inicia buscando soluciones no triviales de (16.1) que sean de la forma

$$U(t, x) = T(t)X(x). \quad (16.4)$$

Se introducen así dos nuevas incógnitas, $T(t)$ y $X(x)$, y por lo tanto necesitaremos dos ecuaciones para determinarlas. Sustituyendo (16.4) en (16.1), obtenemos

$$T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x) \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (16.5)$$

Como sólo nos interesan soluciones no triviales, se requiere que $X(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in (0, L)$. Deducimos de (16.5) que para todo $t > 0$ se tiene

$$T'(t) = \alpha\lambda_1 T(t),$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)}.$$

Similarmente, para todo $x \in (0, L)$ se tiene

$$X''(x) = \lambda_2 X(x),$$

donde

$$\lambda_2 = \frac{T'(t_0)}{\alpha T(t_0)}$$

y $t_0 > 0$ es tal que $T(t_0) \neq 0$. En consecuencia, si ahora tomamos cualquier par (t, x) tal que $T(t) \neq 0$ y $X(x) \neq 0$, lo anterior conduce a

$$\alpha\lambda_1 = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_2,$$

donde la segunda igualdad proviene de (16.5).

De este modo, se deduce que $T(t)$ y $X(x)$ satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$T'(t) + \alpha\lambda T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{16.6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L \tag{16.7}$$

para una constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dado un valor para el parámetro λ , se deduce de (16.6) que

$$T(t) = C e^{-\alpha\lambda t},$$

para una constante $C \in \mathbb{R}$, la cual es no nula pues buscamos soluciones no triviales.

Por otra parte, como aplicación de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, sabemos que la solución general de la ecuación de segundo orden (16.7) se expresa como una combinación lineal de dos funciones fundamentales, cuya forma depende del signo de λ . Más precisamente, como el polinomio característico asociado a (16.7) está dado por $p(m) = m^2 + \lambda$, y éste tiene como raíces¹ $m_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$, obtenemos que:

- Si $\lambda < 0$ entonces $m_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$, luego la solución general de (16.7) está dada por

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

¹Aquí utilizamos la raíz cuadrada en el cuerpo de los complejos.

- Si $\lambda = 0$ entonces $m = 0$ es raíz de multiplicidad 2, y en consecuencia

$$X(x) = C_1 + C_2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\lambda > 0$ entonces $m_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ y por lo tanto

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sen \sqrt{\lambda}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Observación 16.1.1. Cuando $\lambda \neq 0$, una forma de evitar tener que considerar los casos $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$ por separado consiste en utilizar la función exponencial compleja cuando corresponda. En efecto, supongamos que $\lambda > 0$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sen \sqrt{\lambda}x \\ &= C_1(e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x})/2 + C_2(-i)(e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x})/2 \\ &= (C_1 - iC_2)/2e^{i\sqrt{\lambda}x} + (C_1 + iC_2)/2e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= \tilde{C}_1e^{i\sqrt{\lambda}x} + \tilde{C}_2e^{-i\sqrt{\lambda}x}. \end{aligned}$$

Como $i\sqrt{\lambda} = \sqrt{-1}\sqrt{\lambda} = \sqrt{-\lambda}$, de lo anterior deducimos que podemos escribir la solución general de la forma

$$X(x) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

donde los coeficientes C_1, C_2 vienen dados por

$$\begin{aligned} C_1, C_2 &\in \mathbb{R}, \text{ si } \lambda < 0 \\ C_1, C_2 &\in \mathbb{C}, \text{ si } \lambda > 0 \end{aligned}$$

y los coeficientes complejos C_1 y C_2 son uno el conjugado del otro. \square

Sustituyendo las expresiones así obtenidas para $T(t)$ y $X(x)$ en (16.4), se construyen soluciones de (16.1) en variables separadas que son de la forma

$$U_\lambda(t, x) = e^{-\alpha\lambda t}(C_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \quad (16.8)$$

cuando² $\lambda \neq 0$, mientras que para $\lambda = 0$ se tiene

$$U_0(t, x) = C_1 + C_2x.$$

Notemos que tenemos dos tipos de grados de libertad: el primero asociado al parámetro λ ; el segundo, a los coeficientes C_1, C_2 . Como veremos más adelante, esta suerte de "indeterminación" de la solución, que se debe a que hasta ahora sólo hemos utilizado la ecuación (16.1), nos permitirá imponer la condición de borde (16.2) y la inicial (16.3) a combinaciones lineales de soluciones de este tipo.

²Cuando $\lambda > 0$, utilizamos la función exponencial compleja y coeficientes complejos.

16.1.2. Segunda etapa: imponer condiciones de borde

A continuación buscaremos soluciones no triviales de (16.1) en variables separadas que satisfagan la condición de borde (16.2). Esto restringirá los valores admisibles para λ a un subconjunto numerable de \mathbb{R} .

En primer lugar, observamos que si λ es el parámetro introducido anteriormente entonces el caso $\lambda = 0$ queda descartado. En efecto, tomando $U_0(t, x) = C_1 + C_2x$, deducimos de $U_0(t, 0) = 0$ que $C_1 = 0$, lo que junto con $U_0(t, L) = 0$ implica que $C_2 = 0$, obteniendo así la solución trivial.

Busquemos entonces $\lambda \neq 0$ de modo tal que exista una función U_λ de la forma (16.8), que no sea idénticamente nula y que satisfaga

$$U_\lambda(t, 0) = U_\lambda(t, L) = 0, \quad \forall t > 0.$$

De $U_\lambda(t, 0) = 0$ deducimos que

$$e^{-\alpha\lambda t}(C_1 + C_2) = 0, \quad \forall t > 0,$$

y, como $e^{-\alpha\lambda t} > 0$, se tiene

$$C_2 = -C_1.$$

Luego, para alguna constante $C \in \mathbb{C}$ (más aún C es un imaginario puro, pues C_1 y C_2 eran uno el conjugado del otro y $C_1 = -C_2$), que se supone no nula³, tenemos

$$U_\lambda(t, x) = Ce^{-\alpha\lambda t}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \quad (16.9)$$

e imponiendo $U_\lambda(t, L) = 0$, obtenemos

$$e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0. \quad (16.10)$$

Esta última relación debe interpretarse como una ecuación para λ debido a que $L > 0$ es un dato del problema. Recordando que consideramos la función exponencial de variable compleja cuando $\lambda > 0$ y recordando su periodicidad, (16.10) conduce a

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-\lambda}L} = e^{-\sqrt{-\lambda}L} &\Leftrightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}L} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{-\lambda}L = i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \lambda = (k\pi/L)^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como nos interesa $\lambda \neq 0$ y además las soluciones para k y $-k$ coinciden, basta que k recorra todos los enteros positivos para obtener todos los valores posibles para λ , esto es

$$\lambda_k = (k\pi/L)^2, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (16.11)$$

y tenemos que las soluciones en variables separadas correspondientes (16.9) son de la forma

$$\begin{aligned} U_{\lambda_k}(t, x) &= C_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \left[e^{ik\pi x/L} - e^{-ik\pi x/L} \right] \\ &= C_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} 2i \operatorname{sen}(k\pi x/L) \\ &= A_k \Phi_k(t, x), \end{aligned}$$

³Recordemos que nos interesan soluciones no triviales.

como $A_k := 2iC_k$, el cual pertenece a \mathbb{R} pues C_k es un imaginario puro, se tiene

$$\Phi_k(t, x) = e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \text{sen}(k\pi x/L). \quad (16.12)$$

La figura 16.1 ilustra los casos $k = 1$ y $k = 2$. Hemos obtenido así una familia $\{\Phi_k(t, x)\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ de *soluciones fundamentales* de la ecuación (16.1) que satisfacen la condición de borde (16.2).

En la tercera etapa del método, veremos cómo imponer la condición inicial (16.3).

Observación 16.1.2. Antes de continuar, es interesante observar que lo realizado aquí puede interpretarse como la resolución de un *problema de valores propios del tipo Sturm-Liouville*. En efecto, a partir de lo realizado en la primera etapa del método, deducimos que para que la solución en variables separadas (16.4), supuesta no trivial, satisfaga la condición de borde (16.2) se requiere que

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiendo el operador diferencial lineal

$$\begin{aligned} A: V &\rightarrow C([0, L]) \\ f &\mapsto Af := -\frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

sobre el espacio vectorial $V = \{f \in C^2(0, L) \cap C([0, L]) \mid f(0) = f(L) = 0\}$, el problema anterior puede escribirse $AX = \lambda X$. Los escalares λ_k dados por (16.11) son los valores propios del operador A , mientras que los espacios propios correspondientes son unidimensionales y están generados por las funciones propias $X_k(x) = \text{sen}(k\pi x/L)$. \square

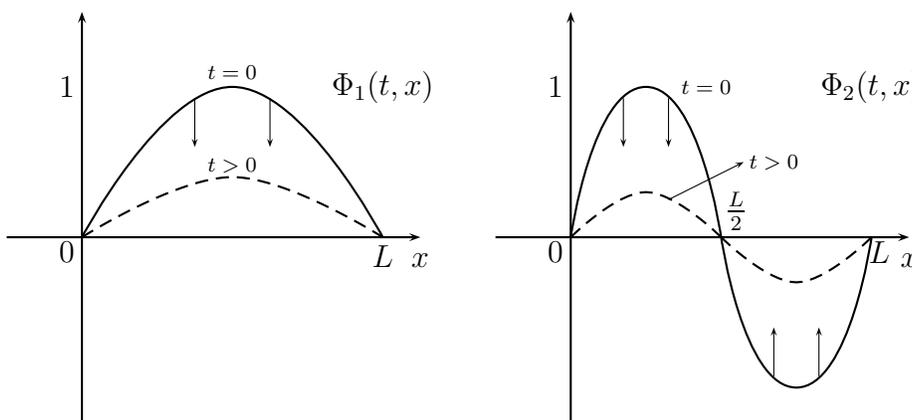


Figura 16.1: Dos soluciones fundamentales de la ecuación del calor

16.1.3. Tercera etapa: imponer la condición inicial

Consideremos ahora la condición inicial (16.3). Para motivar lo que sigue, comencemos por el caso en que

$$f(x) = A \operatorname{sen}(k_0 \pi x / L) \quad (16.13)$$

para algún par de constantes $A \in \mathbb{R}$ y $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dado que la k -ésima solución fundamental (16.12) satisface $\Phi_k(0, x) = \operatorname{sen}(k\pi x / L)$, entonces es directo ver que la solución de (16.1)-(16.3) correspondiente a (16.13) es

$$u(t, x) = A\Phi_{k_0}(t, x) = Ae^{-\alpha(k_0\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k_0\pi x / L).$$

Más generalmente, si

$$f(x) = \sum_{i=1}^m A_i \operatorname{sen}(k_i \pi x / L)$$

para ciertas constantes $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ y $0 < k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$, entonces la solución buscada es

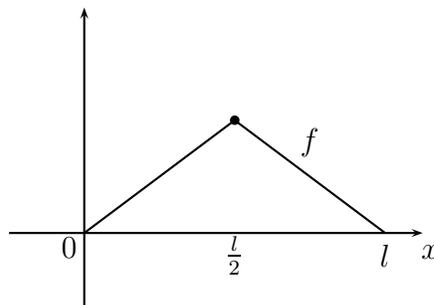
$$u(t, x) = \sum_{i=1}^m A_i \Phi_{k_i}(t, x) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k_i \pi x / L).$$

En efecto, de acuerdo al principio de superposición (ver sección 15.6), la linealidad de (16.1) implica que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución de (16.1). Además, como cada solución fundamental satisface la condición de borde (16.2), sus combinaciones lineales también la satisfacen:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \sum_{i=1}^m A_i \Phi_{k_i}(t, 0) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(0) = 0, \\ u(t, L) &= \sum_{i=1}^m A_i \Phi_{k_i}(t, L) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k_i \pi) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, es directo verificar que $u(0, x) = f(x)$.

¿Que ocurre para una condición inicial correspondiente a una función $f(x)$ más general? Por ejemplo, como proceder si $f(x)$ no tiene descomposición como suma finita de senos y cosenos, como la función siguiente



La idea es escribir $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(k\pi x/L) \quad (16.14)$$

y tomar como solución de nuestro problema a la función

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x/L)$$

Como se vio en el capítulo 13, bajo ciertas condiciones una función $f(x)$ tiene una expresión como Serie de Fourier, la cual es precisamente el tipo de Serie de funciones trigonométricas que se necesita para la encontrar el valor de los coeficientes que aparecen al imponer la condición inicial.

16.2. Aplicación en la Resolución de EDPs

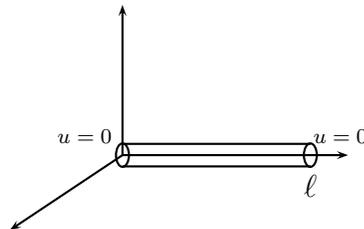
El método de separación de variables consiste en encontrar la solución u de una EDP como superposición de soluciones elementales U_k de la ecuación, es decir $u = \sum \alpha_k U_k$. Los coeficientes α_k se ajustan de manera que u satisfaga las condiciones de borde e iniciales.

16.2.1. Ecuación del calor en una barra finita: condiciones de borde de tipo Dirichlet

Retomemos la ecuación del calor para el caso de una barra finita:

$$\begin{array}{lll} (EC) & u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, 0 \leq x \leq \ell \\ (CB) & u(0, x) = f(x) & 0 \leq x \leq \ell \\ (CI) & u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 & t > 0 \end{array}$$

donde $\alpha > 0$.



Proponemos buscar soluciones elementales en variables separadas: $U(t, x) = T(t)X(x)$

$$(EC) \quad T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{indep. de } x} = \alpha \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{indep. de } t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \text{ cte} \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda/\alpha \text{ cte} \end{cases}$$

Se obtienen de este modo las siguientes E.D.O's:

$$\begin{cases} T(t) = ae^{\lambda t} \\ X(x) = be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} + ce^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} \end{cases}$$

Luego $U(t, x) = a \cdot e^{\lambda t} [be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} + ce^{\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$. Notemos que la constante a puede ser absorbida en α_k ; es por eso que la podemos suprimir de la familia de soluciones $U(t, x)$. Examinemos ahora la condición de borde en $x = 0$

$$(CB) \quad u(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evaluando, se obtiene $b + c = 0$ equivalentemente $c = -b$. Luego

$$U(t, x) = b \cdot [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}] e^{\lambda t}$$

Análogamente a lo anterior, hemos absorbido en α_k la constante b . Incorporemos al análisis la otra condición de borde (en $x = \ell$)

$$(CB) \quad u(t, \ell) = 0 \quad \forall t$$

Evaluando, se obtiene $e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} = e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}$, es decir

$$e^{2\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} = 1$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda/\alpha}\ell &= 2k\pi i & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\lambda}{\alpha} &= -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \\ \lambda &= -\alpha\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$U(t, x) = [e^{\frac{k\pi i}{\ell}x} - e^{-\frac{k\pi i}{\ell}x}] e^{-\alpha\left(\frac{k\pi i}{\ell}\right)^2 t} = 2i \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)^2 t}$$

Donde la constante $2i$ es absorbida en α_k . De esta forma, se obtiene que para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene la solución elemental

$$U_k(t, x) = \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{\ell} \right) e^{-\alpha\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)^2 t}$$

Nota: Como $U_{-k}(t, x) = -U_k(t, x)$ basta considerar el conjunto de soluciones elementales tales $U_k(t, x); k = 1, 2, 3, \dots (k \in \mathbb{N})$.

Cada función U_k satisface (EC) y (CB), de modo que $\sum \alpha_k U_k(t, x)$ también. Solo nos queda ajustar las constantes α_k de manera de satisfacer (CI). Postulamos

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t}$$

Para $t = 0$ se debe tener

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

por lo cual α_k corresponde al coeficiente de Fourier de la extensión impar $\tilde{f} : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & x \in [-\ell, 0] \end{cases}$$

es decir

$$\alpha_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

En conclusión

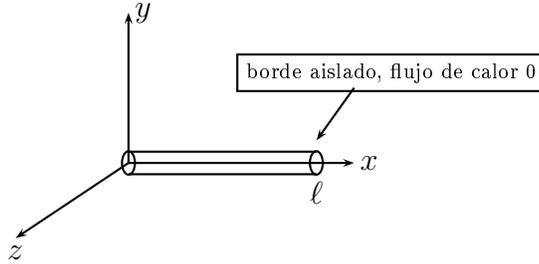
$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t}$$

Notemos que $u(t, x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y que las frecuencias más altas decaen más rápidamente.

16.2.2. Ecuación del calor en una barra finita. Condiciones de borde de tipo Neumann

Analicemos el ejemplo anterior con condición de borde tipo Neumann:

$$\begin{aligned} (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} & t > 0, 0 < x < \ell \\ (CB) \quad u_x(t, 0) &= u_x(t, \ell) = 0 & t > 0 \\ (CI) \quad u(0, x) &= f(x) & 0 < x < \ell \end{aligned}$$



Soluciones elementales: Se obtienen de la misma forma que en el caso anterior

$$U(t, x) = T(t)X(x) = \dots = e^{\lambda t} \left[a e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} + b e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} \right]$$

$$(CB) \quad u_x(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evaluando en $x = 0$ se obtiene $a\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} - b\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = 0$, lo que equivale a $\lambda = 0$ o bien $a = b$. En el primer caso $U_o = cte = 1$, y en el segundo se tiene:

$$U(x, t) = a \cdot e^{\lambda t} \left[e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x} \right]$$

Como se ha hecho en casos anteriores absorbemos a en α_k . Veamos ahora qué pasa con la condición en $x = \ell$

$$(CB) \quad U_x(t, \ell) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evaluando en $x = \ell$ se obtiene

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \left[e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell} \right] = 0$$

de donde $\lambda = 0$ (ya visto) o bien $e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell} = e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell}$. Desarrollando esto último llegamos a

$$\lambda = -\alpha \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^2 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Encontramos así, dado $k \in \mathbb{Z}$, la solución elemental asociada a ese k que se escribe

$$U_k(t, x) = \left[e^{\frac{k\pi i}{\ell}x} + e^{-\frac{k\pi i}{\ell}x} \right] e^{-\alpha \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t} = \cos \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t},$$

donde el factor 2 producido por el coseno es absorbido en forma clásica.

Aplicando el principio de superposición podemos concluir que

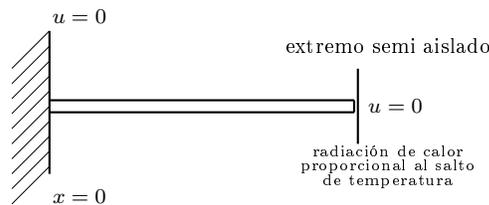
$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \cos \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^2 t}$$

Para esto último hubo que extender f de forma par sobre $[-\ell, \ell]$.

16.2.3. Ecuación del calor en barra finita. Condiciones mixtas

Veamos la ecuación del calor en el caso con condiciones mixtas, es decir Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro:

$$\begin{aligned}
 (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \quad t > 0, 0 < x < \ell \\
 (CI) \quad u(0, x) &= f(x) \quad 0 < x < \ell \\
 (CB) \quad u(t, 0) &= 0 \quad t > 0 \quad \text{temperatura fija} \\
 u_x(t, \ell) &= -\beta u(t, \ell) \quad t > 0 \quad \text{extremo semi-aislado}
 \end{aligned}$$



Como antes se obtiene $U(t, x) = e^{\lambda t} [ae^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} + be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$ y la (CB) $u(t, 0) = 0 \quad t > 0$ implica $a + b = 0$ de modo que nos reducimos a

$$U(t, x) = e^{\lambda t} [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$$

La (CB) en el extremo semi-abierto se escribe

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} + e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}] = -\beta [e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}]$$

Supongamos que $\lambda < 0$ (ya que es el único caso interesante de analizar, pues los otros casos entregan soluciones triviales) y definamos $i\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$. Tras el desarrollo correspondiente de las exponenciales se llega a

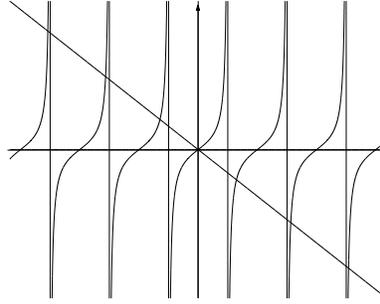
$$2i\mu \cos \mu\ell = -\beta i \sin \mu\ell$$

o equivalentemente, tomando $y = \mu\ell$.

$$\frac{y}{\ell} \cos y = -\beta \sin y$$

o bien

$$-\frac{y}{\ell\beta} = \tan y$$

Figura 16.2: funciones $-y$ y $\tan(y)$

Esta ecuación trascendente entrega una familia de soluciones numerables, digamos $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ la cual se puede encontrar mediante métodos numéricos. Estas se pueden representar como las intersecciones de los gráficos de las funciones $-\frac{y}{l\beta}$ con $\tan y$ (lo que se puede apreciar en el gráfico 16.2).

Como $y_k \neq k\pi$, los coeficientes α_k no corresponden a los coeficientes de Fourier clásicos, pero para encontrarlos se razona de manera análoga. En efecto

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t, x) \quad \forall t > 0, 0 < x < \ell$$

en particular

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(0, x)$$

con

$$U_k(t, x) = e^{y_k^2/\ell^2 \alpha t} [e^{y_k/\ell x} - e^{-y_k/\ell x}]$$

Así

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [e^{y_k/\ell x} - e^{-y_k/\ell x}]$$

Como $\frac{y_k}{\ell} = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha}}$ se tiene $y_k \in \mathbb{C}$, y el problema se reduce a encontrar los coeficientes α_k de modo que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell}$$

Ahora, multiplicando por $\operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell}$ e integrando sobre $[0, \ell]$ (donde supondremos que el intercambio de la sumatoria con la integral es válido) se obtiene

$$\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\ell} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx$$

Ahora notemos que

$$\int_0^\ell \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx \equiv 0 \quad \forall k \neq j$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\ell f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx &= \alpha_j \int_0^\ell \operatorname{sen}^2 \frac{y_j x}{\ell} dx \\ \alpha_j &= \frac{\int_0^\ell f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx}{\int_0^\ell \operatorname{sen}^2 \frac{y_j x}{\ell} dx} \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $k \neq j$; entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx &= \left. \frac{\operatorname{sen}(y_k - y_j) \frac{x}{\ell}}{2(y_k - y_j)/\ell} - \frac{\operatorname{sen}(y_k + y_j) \frac{x}{\ell}}{2(y_k + y_j)/\ell} \right|_0^\ell \\ &= \frac{\ell}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(y_k - y_j)}{y_k - y_j} - \frac{\operatorname{sen}(y_k + y_j)}{y_k + y_j} \right] \\ &= \frac{\ell}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} y_k \cos y_j - \cos y_k \operatorname{sen} y_j}{y_k - y_j} - \frac{\operatorname{sen} y_k \cos y_j + \cos y_k \operatorname{sen} y_j}{y_k + y_j} \right] \\ &= \frac{1}{2\beta} \left[\frac{y_k \cos y_k \cos y_j - y_j \cos y_k \cos y_j}{y_k - y_j} - \frac{y_k \cos y_k \cos y_j + y_j \cos y_k \cos y_j}{y_k + y_j} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

16.2.4. Ecuación de Laplace en banda semi-infinita.

En esta sección consideramos la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} (EC) \quad 0 &= u_{xx} + u_{yy} \quad y > 0, \quad 0 < x < \ell \\ (CB) \quad u(0, y) &= u(\ell, y) = 0 \quad y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \quad 0 < x < \ell \\ u(x, \infty) &= 0 \quad 0 < x < \ell \end{aligned}$$

en una región como se muestra a continuación **Soluciones elementales:** Las suponemos en variables separadas

$$U(x, y) = X(x)Y(y)$$

Se tiene $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$. Dividiendo por XY se obtiene

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = cte.$$

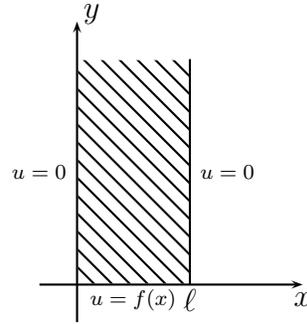


Figura 16.3: Dominio semi-infinito para la ecuación de Laplace

Esto nos conduce a dos E.D.O's, una para X y otra para Y que resolvemos para llegar a

$$\begin{cases} X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ Y(y) = ce^{\sqrt{-\lambda}y} + de^{-\sqrt{-\lambda}y} \end{cases}$$

Utilizando la condición de borde

$$U(0, y) = 0 \quad \forall y$$

obtenemos $a + b = 0$, de donde

$$X(x) = e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Por otro lado

$$U(\ell, y) = 0 \quad \forall y$$

Evaluando se tiene $e^{\sqrt{\lambda}\ell} = e^{-\sqrt{\lambda}\ell}$ que resulta equivalente a $e^{2\sqrt{\lambda}\ell} = 1$. De esto último se desprende que

$$2\sqrt{\lambda}\ell = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$$

Así

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$$

Podemos entonces reescribir las expresiones de $X(x)$ y de $Y(y)$, módulo una constante

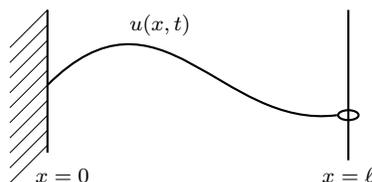
$$\begin{cases} X(x) = \text{sen} \frac{k\pi x}{\ell} \\ Y(y) = c \cdot e^{\frac{k\pi}{\ell}y} + d \cdot e^{-\frac{k\pi}{\ell}y} \end{cases}$$

De la condición

$$U(x, \infty) = 0$$

se desprende que $c = 0$, pues de otro modo la solución diverge, cosa que no es aceptable desde el punto de vista de la física. Tenemos que $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$U_k(x, y) = e^{-\frac{k\pi y}{\ell}} \text{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

Figura 16.4: Cuerda de largo ℓ con un extremo fijo y el otro libre

Luego, en virtud del principio de superposición, la solución tiene la forma

$$u(x, y) = \sum \alpha_k e^{\frac{-k\pi y}{\ell}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

Ahora bien $u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$, lo que nos permite expresar los coeficientes α_k como

$$\alpha_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi$$

Finalmente, obtenemos una fórmula explícita para la solución

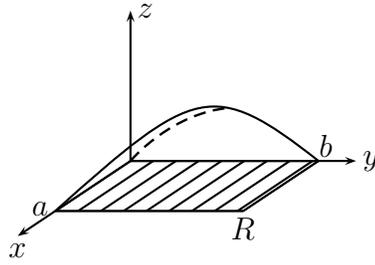
$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] e^{-k\pi y/\ell} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

Ejercicio. Resolver la ecuación de ondas de una cuerda de largo ℓ con un extremo fijo y el otro libre.

16.2.5. Oscilaciones en una membrana rectangular

Consideremos una membrana rectangular. Como se vio en la sección 15.3.1 la ecuación que modela esta situación es

$$\begin{aligned} (EO) \quad & u_{tt} = \gamma^2(u_{xx} + u_{yy}) && \text{en } R \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (CB) \quad & u = 0 && \text{sobre } \partial R \\ (CI) \quad & u(0, x, y) = f(x, y) && \text{en } R \\ & u_t(0, x, y) = g(x, y) && \text{en } R \end{aligned}$$



donde la región viene dada por $R = [0, a] \times [0, b]$.

Como antes, separamos variables: $U(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$. Reemplazando, llegamos a

$$T''XY = \gamma^2[TX''Y + TXY''].$$

Dividiendo por XYT se obtiene

$$\frac{T''}{T} = \gamma^2 \left[\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right] \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t \in \mathbb{R}_+$$

Como la igualdad anterior es cierta para cualquier valor que tomen las variables x, y y t , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{T''}{T} &= K_0 \\ \frac{X''}{X} &= K_1 \\ \frac{Y''}{Y} &= K_2 \end{aligned}$$

donde K_0, K_1 y K_2 , constantes, para las cuales además se satisface la relación $K_0 = \gamma^2(K_1 + K_2)$.

Escribimos las soluciones de las E.D.O's correspondientes

$$\begin{aligned} T(t) &= a_0 e^{\sqrt{K_0}t} + b_0 e^{-\sqrt{K_0}t} \\ X(x) &= a_1 e^{\sqrt{K_1}x} + b_1 e^{-\sqrt{K_1}x} \\ Y(y) &= a_2 e^{\sqrt{K_2}y} + b_2 e^{-\sqrt{K_2}y} \end{aligned}$$

Impongamos las condiciones de borde

$$u(t, 0, y) = 0 \quad \forall t > 0, \forall y \in [0, b]$$

Evaluando obtenemos $a_1 + b_1 = 0$. Por otra parte

$$u(t, a, y) = 0 \quad \forall t > 0, \forall y \in [0, b]$$

Luego, podemos escribir $e^{\sqrt{K_1}a} = e^{-\sqrt{K_1}a}$, que equivale a

$$2\sqrt{K_1}a = 2k_1\pi i, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

Desarrollando ésto último obtenemos

$$K_1 = -\left(\frac{k_1\pi}{a}\right)^2$$

Llegamos a una expresión para X

$$X(x) = \text{sen}\left(\frac{k_1\pi}{a}x\right) \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

Análogamente, utilizando las condiciones

$$\begin{aligned} CB : u(t, x, 0) &= 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in [0, a] \\ u(t, x, b) &= 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in [0, a] \end{aligned}$$

obtenemos una expresión para Y

$$Y(y) = \text{sen}\left(\frac{k_2\pi}{b}y\right) \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Se tiene además

$$K_0 = \gamma^2(K_1 + K_2) = -\gamma^2\pi^2 \left[\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^2 \right]$$

Podemos con esto escribir una solución elemental. En este caso queda parametrizada por k_1 y k_2 .

$$U_{k_1, k_2} = \text{sen}\frac{k_1\pi x}{a} \text{sen}\frac{k_2\pi y}{b} [\alpha_{k_1 k_2} \text{sen} w_{k_1 k_2} t + \beta_{k_1 k_2} \cos w_{k_1 k_2} t]$$

donde

$$w_{k_1 k_2} = \gamma\pi \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^2}$$

Aplicando el principio de superposición, escribimos la solución general

$$u(t, x, y) = \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \text{sen}\frac{k_1\pi x}{a} \text{sen}\frac{k_2\pi y}{b} [\alpha_{k_1 k_2} \text{sen} w_{k_1 k_2} t + \beta_{k_1 k_2} \cos w_{k_1 k_2} t]$$

Los coeficientes $\alpha_{k_1 k_2}$ y $\beta_{k_1 k_2}$ se ajustan de modo de reproducir las condiciones iniciales (CI):

$$u(0, x, y) = \sum_{k_1 k_2} \beta_{k_1 k_2} \text{sen}\frac{k_1\pi x}{a} \text{sen}\frac{k_2\pi y}{b} = f(x, y)$$

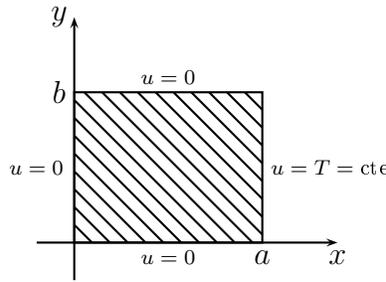


Figura 16.5: Dominio rectangular para la ecuación de Laplace

De este modo

$$\beta_{k_1 k_2} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} dy dx$$

Para la otra condición

$$u_t(0, x, y) = \sum_{k_1 k_2} \alpha_{k_1 k_2} w_{k_1 k_2} \operatorname{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} = g(x, y)$$

Y el coeficiente $\alpha_{k_1 k_2}$ queda entonces determinado por

$$\alpha_{k_1 k_2} = \frac{4}{ab w_{k_1 k_2}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \operatorname{sen} \frac{k_1 \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{k_2 \pi y}{b} dy dx$$

16.2.6. Ecuación de Laplace en un rectángulo

Analicemos ahora el caso de una membrana rectangular en régimen estacionario, es decir

$$\begin{aligned} (L) \quad u_{xx} + u_{yy} &= 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ (CB) \quad u(x, 0) &= u(x, b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0, y) &= 0 & 0 < y < b \\ u(a, y) &= T & 0 < y < b, \end{aligned}$$

donde T es una constante.

Separando variables se obtiene $\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda = \text{cte}$. Esto conduce a dos EDO's cuyas soluciones son

$$\begin{cases} Y = ae^{\sqrt{\lambda}y} + be^{-\sqrt{\lambda}y} \\ X = ce^{\sqrt{-\lambda}x} + de^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{cases}$$

donde a, b, c y d son constantes a determinar. Imponemos la condición de borde $u(x, 0) = 0$, la cual nos entrega $a + b = 0$. Luego

$$Y(y) = a \left(e^{\sqrt{\lambda}y} - e^{-\sqrt{\lambda}y} \right)$$

Utilizando ahora $u(0, y) = 0$, se obtiene $c + d = 0$, con lo que se concluye que

$$X(x) = c \left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{\sqrt{\lambda}x} \right)$$

Ocupando $u(x, b) = 0$, se tiene que $e^{2\sqrt{\lambda}b} = 1$, lo que nos lleva a una ecuación para λ

$$\sqrt{\lambda}b = 2k\pi i$$

$$\lambda = - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2$$

Así, se encuentra que

$$Y(y) = 2ai \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

y

$$X(x) = 2c \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b}$$

Luego, escribimos la solución elemental

$$U_k(x, y) = \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

Aplicando el principio de superposición

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

Luego, para calcular las constantes α_k definimos \bar{T} mediante

$$\bar{T}(y) = \begin{cases} T & 0 < y < b \\ -T & -b < y < 0, \end{cases}$$

es decir, \bar{T} es la extensión impar de la función que vale la constante T sobre el intervalo $(0, b)$. Notar que el valor de \bar{T} en 0 no es relevante.

Gracias a la condición de borde

$$u(a, y) = T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{senh} \frac{k\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b},$$

el coeficiente de Fourier α_k , viene dado por

$$\alpha_k \operatorname{sen} h \frac{k\pi a}{b} = \frac{2T}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2T}{k\pi} [1 - (-1)^k]$$

Finalmente obtenemos

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4T}{(2k-1)\pi \operatorname{senh}[(2k-1)\pi a/b]} \operatorname{senh} \left((k-1) \frac{\pi x}{b} \right) \operatorname{sen} \left((2k-1) \frac{\pi y}{b} \right).$$

16.2.7. Ecuación de ondas. Cuerda finita.

Las oscilaciones de una cuerda elástica vienen descritas por la ecuación

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} &= 0 & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \ell) &= 0 & t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) & 0 < x < \ell \\ u_t(0, x) &= g(x) & 0 < x < \ell \end{aligned} \quad (\text{EO})$$

Separamos variables: $U(t, x) = T(t)X(x)$. Al reemplazar esto en la ecuación se obtiene $T''X = \alpha^2 TX''$, es decir

$$\frac{T''}{T} = \alpha^2 \frac{X''}{X} = \text{cte} = \lambda$$

De este modo, una vez más aparecen dos E.D.O's

$$\begin{cases} T'' = \lambda T \\ X'' = \frac{\lambda}{\alpha^2} X \end{cases}$$

cuyas respectivas soluciones son

$$\begin{cases} T(t) = ae^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t} \\ X(x) = ce^{\sqrt{\lambda}x/\alpha} + de^{-\sqrt{\lambda}x/\alpha} \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u(t, 0) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow c + d = 0. \\ u(t, \ell) = 0 &\Rightarrow X(\ell) = 0 \Rightarrow e^{\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} = 1 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda}\ell/\alpha &= 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{\alpha k\pi i}{\ell} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Escribimos la solución elemental

$$U_k(t, \alpha) = \left[ae^{\frac{\alpha k \pi t i}{\ell}} + be^{-\frac{\alpha k \pi t i}{\ell}} \right] \cdot c \cdot \underbrace{\left[e^{\frac{\alpha k \pi x i}{\ell}} - e^{-\frac{\alpha k \pi x i}{\ell}} \right]}_{2i \operatorname{sen}\left(\frac{k \pi x}{\ell}\right)}$$

Reemplazando y absorbiendo constantes, llegamos a

$$U_k(t, \alpha) = \left[\tilde{a} \cos \frac{\alpha k \pi t}{\ell} + \tilde{b} \operatorname{sen} \frac{\alpha k \pi t}{\ell} \right] \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Por el principio de superposición

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{\alpha k \pi t}{\ell} + b_k \operatorname{sen} \frac{\alpha k \pi t}{\ell} \right] \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}$$

es solución de la ecuación.

Tenemos dos familias de constantes que determinar: a_k y b_k . Para las primeras utilizamos la condición inicial sobre u

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}$$

y obtenemos

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell} dx$$

que corresponde al coeficiente de Fourier de la extensión impar de $f(x)$.

Para encontrar b_k debemos imponemos la condición sobre u_t :

$$u_t(0, x) = g(x)$$

lo que equivale a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \frac{\alpha k \pi}{\ell} \right) \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell}.$$

De esta relación observamos que $(b_k \frac{\alpha k \pi}{\ell})$ debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión impar de g , y deducimos que

$$b_k = \frac{2}{\alpha k \pi} \int_0^{\ell} g(x) \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{\ell} dx.$$

16.3. Ejercicios

1. Encontrar las soluciones elementales en variables separadas de

$$u_t = au_{xx} - bu, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

con condiciones de borde Dirichlet (a, b constantes positivas conocidas).

2. Resuelva el problema de Dirichlet en el círculo:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & R > r \\ u(R, \theta) &= f(\theta) & \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Observe que a utilizar separación de variables, si $u(r, \theta) = A(r)B(\theta)$, entonces $B(0) = B(2\pi)$ y $B'(0) = B'(2\pi)$.

3. Resuelva el problema de Neumann en el círculo:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & R > r \\ u_r(R, \theta) &= f(\theta) & \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

4. Resuelva:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 4 & 1 > r \\ u(1, \theta) &= \cos(2\theta) & \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

5. Encontrar soluciones de las siguientes ecuaciones separando variables.

- (a) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
 (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
 (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = 0$.
 (d) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 x = 0$.

16.4. Problemas

Problema 16.1. Resuelva la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + u = 0$$

en la región $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$ con condiciones de borde

$$u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad \text{y} \quad u(x, 2) = x(1 - x), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Problema 16.2. Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} y_{tt}(x, t) &= y_{xx}(x, t) - \cos(x) & 0 < x < 2\pi \quad t > 0 \\ y_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 2\pi \\ y(0, t) = y(2\pi, t) &= 0 & t > 0 \\ y(x, 0) &= 0 & 0 < x < 2\pi. \end{aligned}$$

Indicación: Considere soluciones del tipo $y(x, t) = Y(x, t) - h(x)$ para una función h adecuada.

Problema 16.3. Sea $u = v(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t)$ una solución con simetría “radial” de la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{en } \mathbb{R}^3.$$

- (i) Probar que v satisface la ecuación $v_{tt} = c^2[v_{rr} + 2v_r/r]$ para $r \geq 0, t \geq 0$.
- (ii) Sea $w(r, t) = rv(r, t)$. Probar que w satisface la ecuación de ondas unidimensional.
- (iii) Encontrar w para las condiciones iniciales $u(x, y, z, 0) = \exp(-r^2)$ y $u_t(x, y, z, 0) = 0$.

Problema 16.4. Resuelva la EDP no homogénea de una dimensión:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x, t) & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) &= 0. \end{aligned}$$

Problema 16.5. Resuelva un caso particular del problema anterior:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= x & x \in [0, \pi], t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) &= 0. \end{aligned}$$

Problema 16.6. Resuelva:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & 2 > r > 1, \pi > \theta > 0 \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) &= 0 \\ u_\theta(r, \pi) &= r^2. \end{aligned}$$

Problema 16.7. Resuelva la ecuación del calor en un cuadrado:

$$\begin{aligned} u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) &= 0 & (x, y) \in (0, \pi)^2, t > 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

Problema 16.8. Resuelva la ecuación del calor en un cubo:

$$\begin{aligned} u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) &= 0 & (x, y, z) \in (0, \pi)^3, t > 0 \\ u(x, y, z, 0) &= f(x, y) \\ u(0, y, z, t) = u(\pi, y, z, t) = u(x, y, \pi, t) &= 0 \\ u_y(x, 0, z, t) = u_y(x, \pi, z, t) &= 0. \end{aligned}$$

Problema 16.9. Dos gases uniformemente distribuidos en un volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se encuentran a temperaturas $u(x, y, z, t)$ y $v(x, y, z, t)$, satisfaciéndose las ecuaciones

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_t = c^2 \Delta u - k(u - v) \\ (2) \quad & v_t = a^2 \Delta v - l(v - u) \end{aligned}$$

donde $k > 0$ y $l > 0$ son constantes relacionadas con el intercambio de calor entre los gases. La superficie $\partial\Omega$ es adiabática ($\nabla u \cdot \hat{n} = \nabla v \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$), y en el instante inicial ($t = 0$) las temperaturas u, v son constantes en todo Ω iguales a u_0 y v_0 respectivamente.

(a) Sea $U(t) = \iiint_{\Omega} u \, dx dy dz$ y $V(t) = \iiint_{\Omega} v \, dx dy dz$. Probar que $\dot{U} = -k(U - V)$ y análogamente $\dot{V} = -l(V - U)$.

(b) Deducir que la cantidad $K(t) = lU(t) + kV(t)$ se conserva y probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \frac{lu_0 + kv_0}{k + l} \mu(\Omega).$$

(c) Sea $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solución de la ecuación auxiliar

$$\begin{cases} \Delta w = \alpha w & \text{en } \Omega \\ \nabla w \cdot \hat{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

(c.1) Probar la identidad: $\iint_{\partial\Omega} w \nabla w \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \|\nabla w\|^2 + \alpha \iiint_{\Omega} w^2$.

(c.2) Deducir que “ $\alpha > 0 \Rightarrow w \equiv 0$ ” y “ $\alpha = 0 \Rightarrow w \equiv \text{constante}$ ”.

(d) Considere ahora las ecuaciones (1) y (2) en **régimen estacionario** y sean \bar{u}, \bar{v} las soluciones. Probar primero que $\bar{u} - \bar{v} \equiv 0$, y luego que $\bar{u} \equiv \text{cte} \equiv \bar{v}$.

(e) Calcular, usando la parte (b), la temperatura constante del régimen estacionario.

Problema 16.10.⁴

Considere la ecuación del calor en una esfera sólida de radio R y difusividad térmica $\alpha > 0$. Buscamos soluciones con simetría esférica, vale decir, $u = u(t, r)$.

(a) Expresando el Laplaciano en coordenadas esféricas, muestre que $u = u(t, r)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru).$$

(b) Usando separación de variables pruebe que esta ecuación admite soluciones del tipo

$$U(t, r) = \exp(-\alpha\beta^2 t) \frac{a \sin(\beta r) + b \cos(\beta r)}{r}.$$

con a, b, β constantes a determinar.

(c) Pruebe que basta tomar $b = 0$ para que la solución encontrada en la parte (b) satisfaga la condición de borde en $r = 0$ dada por $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial r}(t, r) = 0$, para $t > 0$.

⁴Examen Especial. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

- (d) Determine constantes $\beta = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, tales que se satisfaga además la condición de borde $u(t, R) = 0$ para $t > 0$.
- (e) Concluya que la solución de la ecuación del calor en la esfera con las condiciones de borde dadas en las partes (c) y (d), es de la forma

$$u(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\alpha\beta_k^2 t) \sin(\beta_k r)/r$$

y encuentre los coeficientes A_k en términos de la condición inicial $u(0, r) = f(r)$, $0 \leq r \leq R$.

Problema 16.11.⁵ Encuentre la solución $u = u(t, x)$ de la ecuación:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

bajo las condiciones:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) &= \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{si } 1/2 < x < 1, \end{cases} \\ u_t(0, x) &= 3 \operatorname{sen}(2\pi x), & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Problema 16.12.⁶ Encuentre una expresión en forma de una serie para la solución $u(x, t)$ de

$$\text{(EDP)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$\text{(CB)} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para } t > 0,$$

$$\text{(CI)} \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1.$$

Problema 16.13.⁷

- (i) Determine la serie de Fourier de la función $f(x) = 1 - |x|$ en el intervalo $[-2, 2]$, y deduzca el valor de la serie de números reales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

- (ii) *Pasando el lado derecho a la condición de inicial.* Resuelva el siguiente problema diferencial en derivadas parciales

$$\begin{aligned} y_{tt} - y_{xx} &= 4\operatorname{sen}(2x), & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ y(0, t) &= y(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ y(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi, \\ y_t(x, 0) &= \pi - x, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Ind.: Considere el cambio $u(x, t) = y(x, t) - \operatorname{sen}(2x)$.

⁵Control 3. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁶Examen. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: F. Álvarez, R. Correa y P.Gajardo

⁷Control 3. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

Problema 16.14. Resuelva la ecuación de ondas en $[0, \pi]$ con las condiciones de borde e iniciales que se indican:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}(x) - 2 \text{sen}(3x), & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = 3 \text{sen}(2x), & x \in (0, \pi). \end{array} \right.$$

Problema 16.15. Resuelva el problema de ecuaciones en derivadas parciales dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2u_{tt} = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u_t(x, 0) = \cos(\pi x), & x \in (0, 1). \end{array} \right.$$

Problema 16.16. ⁸

1. Desarrolle la serie de Fourier de senos para la función $f(x) = x$ en $(0, \pi)$.
2. Resolver el sistema de la ecuación del calor dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} + 6u_x = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = e^{3x}, & x \in (0, \pi), \end{array} \right. \quad (16.15)$$

siguiendo las siguientes indicaciones:

- a) Aplicando el método de separación de variables e imponiendo las condiciones de borde, demuestre que las soluciones elementales son de la forma $u_k = C_k e^{(-k^2-9)t+3x} \text{sen}(kx)$
- b) Imponiendo la condición inicial y usando la parte a), encuentre la solución del sistema (16.15).

⁸Examen. Otoño 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

16.5. Resolución de problemas

■ Solución Problema 16.16

1. Para encontrar la serie de senos, necesitamos la extensión impar de x al intervalo $(-\pi, \pi)$. Como $f(x) = x$ es impar, tenemos que integrar f en $(-\pi, \pi)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)xdx &= -\frac{1}{n} \cos(nx)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx)dx \\ &= -\frac{1}{n}(-1)^n 2\pi + \frac{1}{n^2} (\text{sen}(nx)) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Entonces los coeficientes de la serie buscada son

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)xdx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

y además f es diferenciable, y L^2 integrable, por lo que se cumplen los teoremas de convergencia vistos en clase. Por tanto la serie de $f(x) = x$ es

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx) \\ &= 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx) \end{aligned}$$

(**Obs** : Es igualmente correcto si desde el principio el alumno solo integra para los $k > 0$ y divide por π en lugar de 2π .)

2. a) Haciendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ tenemos que

$$XT' - X''T + 6X'T = 0$$

$$\Rightarrow XT' = X''T - 6X'T$$

Razonando como es usual (de que en algún punto la funciones son distintas de cero y por tanto podemos dividir por XT , y después tener en cuenta la independencia de las variables x y t) se tienen las ecuaciones

$$T' = \lambda T$$

$$X'' - 6X' = \lambda X$$

La ecuación para T tiene solución $T(t) = Ce^{\lambda t}$ y para la ecuación de X resolvemos la ecuación característica:

$$r^2 - 6r - \lambda = 0$$

que tiene soluciones

$$r_1 = 3 + \sqrt{\lambda + 9} \quad r_2 = 3 - \sqrt{\lambda + 9}$$

Por tanto la soluciones son de la forma

$$u(x, t) = C_1 e^{\lambda t} e^{(3+\sqrt{\lambda+9})x} + C_2 e^{\lambda t} e^{(3-\sqrt{\lambda+9})x}$$

Imponiendo las condiciones de borde:

En $x = 0$:

$$0 = u(0, t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}$$

para toda $t > 0$, por lo que

$$C_1 = -C_2$$

y por tanto, denotando $C = C_1 = -C_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= C e^{\lambda t} \left(e^{(3+\sqrt{\lambda+9})x} - e^{(3-\sqrt{\lambda+9})x} \right) \\ &= C e^{\lambda t + 3x} \left(e^{x\sqrt{\lambda+9}} - e^{-x\sqrt{\lambda+9}} \right) \\ &= C e^{\lambda t + 3x} 2 \sinh(x\sqrt{\lambda+9}) \end{aligned}$$

En $x = \pi$:

$0 = u(\pi, t) = C e^{\lambda t + 3\pi} \sinh(\pi\sqrt{\lambda+9})$ para todo $t > 0$. Teniendo en cuenta las propiedades de la función \sinh , se tiene que λ cumple esta relación ssi existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\pi\sqrt{\lambda+9} = k\pi i$$

de donde

$$\lambda + 9 = -k^2$$

(**Obs:** Es posible que alumno haya probado esto directamente por medio de propiedades de la exponencial, o bien usando la relación $e^z - e^{-z} = e^{-iz} - e^{iz} = -2i \operatorname{sen}(iz)$ y el hecho que los ceros de sen son de la forma $k\pi$).

En todo caso, se tiene que

$$\sqrt{\lambda+9} = ki$$

y que

$$\lambda = -k^2 - 9$$

Esto para cada $k \in \mathbb{Z}$, por lo que para cada k se tiene una solución fundamental u_k . Sustituyendo arriba, se concluye que éstas son de la forma

$$\begin{aligned} u_k &= C e^{(-k^2-9)t+3x} \left(e^{xki} - e^{-xki} \right) \\ &= C_k e^{(-k^2-9)t+3x} \operatorname{sen}(kx) \end{aligned}$$

b) De lo anterior, se tiene que toda función de la forma $u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k(x, t)$ es solución de la ecuación. Imponiendo la condición inicial $u(x, 0) = e^{3x}x$, se tiene que

$$e^{3x}x = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k(x, 0) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{3x} \operatorname{sen}(kx) = e^{3x} \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \operatorname{sen}(kx)$$

de donde

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \operatorname{sen}(kx).$$

Por lo tanto las constantes C_k son los coeficientes de la serie de senos de la función $f(x) = x$.

Por la parte a), se tiene que estas constantes son

$$C_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, se concluye que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{(-k^2-9)t+3x} \operatorname{sen}(kx) \\ &= 2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{(-k^2-9)t+3x} \operatorname{sen}(kx) \end{aligned}$$

(**Obs:** Es válido si solo usa la suma de los términos con $k > 0$.)

Capítulo 17

Uso de transformadas en la resolución de EDPs

17.1. Uso de la transformada de Fourier en la resolución de EDPs

La transformada de Fourier es utilizable para ecuaciones en que una o más variables se mueven sobre dominios infinitos como \mathbb{R} o $[0, \infty)$. Ilustremos el método a través de algunos ejemplos.

17.1.1. Ecuación del calor en una barra infinita

Consideremos la ecuación del calor en una barra infinita

$$\begin{aligned} (EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} & t > 0, -\infty < x < \infty \\ (CI) \quad u(0, x) &= f(x) & -\infty < x < \infty \\ (CB) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)| dx &< \infty & t > 0 \end{aligned}$$

La condición $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ tiene una doble finalidad. Por un lado nos garantiza que $u(t, \cdot)$ posee transformada de Fourier, pero también dice que “ $u(t, -\infty) = u(t, \infty) = 0$ ”, es decir, sirve como condición de *borde en infinito*.

Aplicando *TF* en la variable x a la ecuación *EC* se obtiene

$$\widehat{u}_t = \alpha \widehat{u}_{xx} = -s^2 \alpha \widehat{u}$$

Ahora bien

$$\widehat{u}_t(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, s)$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, s) = -s^2 \alpha \widehat{u}(t, s).$$

Esto conduce a

$$\widehat{u}(t, s) = \widehat{u}(0, s) e^{-s^2 \alpha t} = \widehat{f}(s) e^{-s^2 \alpha t}$$

y de aquí

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} e^{-s^2 \alpha t} \widehat{f}(s) ds.$$

Usando la fórmula de la convolución y el hecho que $T^{-1}(e^{-s^2 \alpha t}) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}$ deducimos que

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-(x-y)^2/4\alpha t} f(y) dy$$

Definamos

$$G(t, x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}$$

que se conoce como la función de Green de la ecuación (EC). Vemos entonces que

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x-y) f(y) dy.$$

Ejercicio. Probar $u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(s(\xi-x)) e^{-s^2 \alpha t} d\xi ds$

Interpretación: Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¡Pareciera que $G(0, x)$ está mal definido !

Sin embargo, observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t, x) dx = 1 \quad \forall t > 0.$$

Así $G(0, \cdot)$ puede interpretarse como la función $\delta(\cdot)$ de Dirac. Notemos además que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \left[\frac{x^2}{4\alpha t^2} - \frac{1}{2t} \right] \\ &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\alpha t \sqrt{4\pi\alpha t}} \left[\frac{x^2}{2t} - \alpha \right] \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{x}{2\alpha t} \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x} &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\alpha t \sqrt{4\pi\alpha t}} \left[\frac{x^2}{2\alpha t} - 1 \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t}\end{aligned}$$

de modo tal que $G(t, x)$ puede interpretarse como la solución de

$$\begin{aligned}(EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \\ (CI) \quad u(0, x) &= \delta(x)\end{aligned}$$

Asimismo $v_y(x, t) = G(t, x - y)f(y)$ puede verse como solución de

$$\begin{aligned}(EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \\ (CI) \quad u(0, x) &= \delta(x - y)f(y)\end{aligned}$$

es decir $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy$ es solución de

$$\begin{aligned}(EC) \quad u_t &= \alpha u_{xx} \\ (CI) \quad u(0, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x - y)dy = f(x)\end{aligned}$$

Formalmente:

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\partial G}{\partial t}(t, x - y)dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, x - y)dy \\ &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy\end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t, x - y)dy = f(x).$$

Lo que verifica (EC) y (CI).

17.1.2. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición en el extremo de tipo Dirichlet

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x > 0 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (17.1)$$

Para resolver este problema es útil la noción de extensión impar de una función $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (que por simplicidad seguimos denotando por $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

$$w(x) = \begin{cases} w(x) & x \geq 0 \\ -w(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Notar w es continua en \mathbb{R} si y sólo si w es continua en $[0, \infty)$ y $w(0) = 0$.

Supongamos que u es solución de (17.1) y definamos v como la extensión impar de u con respecto a la variable x , es decir

$$v(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & x > 0 \\ -u(t, -x) & x < 0 \end{cases}$$

La función $v(t, x)$ satisface

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha v_{xx}, & t > 0 \\ v(0, x) &= \tilde{f}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donde \tilde{f} es la extensión impar de f . Por otro lado, si resolvemos la ecuación para v y encontramos una solución impar, como las soluciones de esta ecuación son continuas se tiene $v(t, 0) = 0$, $\forall t > 0$ y en consecuencia restringiendo v a $[0, \infty)$ obtenemos la solución del problema original.

Notemos que f es impar de modo que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 -f(-\xi) e^{-is\xi} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi) e^{is\xi} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \underbrace{[e^{-is\xi} - e^{is\xi}]}_{-2i \operatorname{sen}(s\xi)} d\xi \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(s\xi) d\xi \end{aligned}$$

Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
 v(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} e^{-s^2\alpha t} \widehat{f}(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2\alpha t} e^{isx} \left[\int_0^{\infty} f(\xi) i \operatorname{sen}(s\xi) d\xi \right] ds \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(s\xi) [-i \cos sx + \operatorname{sen}(sx)] e^{-s^2\alpha t} ds d\xi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(s\xi) \operatorname{sen}(sx) e^{-s^2\alpha t} ds d\xi
 \end{aligned}$$

y notemos finalmente que v es impar con respecto a la variable x .

17.1.3. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición de Neumann

El problema es análogo al anterior, excepto por la condición de borde:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (17.2)$$

Para tratar este problema conviene utilizar la noción de extensión par de una función $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, que denotamos por $\bar{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} w(x) & x \geq 0 \\ w(-x) & x < 0. \end{cases}$$

\bar{w} resulta ser continua si y sólo si w es continua. Además \bar{w} es derivable en 0 si y sólo w es derivable en 0 (utilizando la definición de derivada con límite lateral) y $\frac{dw}{dx} = 0$.

Si u es solución de (17.2) y se define $v(t, x)$ como

$$v(t, x) = \begin{cases} v(t, x) & x \geq 0 \\ v(t, -x) & x < 0 \end{cases}$$

entonces $v(t, x)$ satisface

$$\begin{aligned}
 v_t &= \alpha v_{xx} & t > 0, -\infty < x < \infty \\
 v(0, x) &= \bar{f}(x) & -\infty < x < \infty
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si resolvemos la ecuación para v y encontramos que v es par, derivable y que $\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0$, entonces tenemos la solución de (17.2) (restringiendo v a $[0, \infty)$).

Ejercicio. Probar que

$$v(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(s\xi) \cos(sx) e^{-s^2\alpha t} ds d\xi.$$

17.1.4. Problema de Dirichlet en un semiplano

En esta sección consideramos el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & y > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \\ u(x, \infty) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (17.3)$$

Aplicando TF en la variable x se obtiene

$$\widehat{u}_{xx} + \widehat{u}_{yy} = 0$$

y por lo tanto

$$-s^2 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = s^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(s, y) = a(s)e^{sy} + b(s)e^{-sy}$$

Usando las condiciones de borde

$$\begin{cases} \hat{u}(s, 0) = \hat{f}(s) = a(s) + b(s) \\ \hat{u}(s, \infty) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a(s) = 0 & s > 0 \\ b(s) = 0 & s < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(s, y) = \hat{f}(s)e^{-y|s|}$$

de donde

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} e^{-y|s|} \hat{f}(s) ds$$

Usando el Teorema de la convolución y el hecho que $A(e^{-s|y|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + x^2}$ resulta

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + z^2} f(x-z) dz$$

Definamos

$$G(x, y) \triangleq \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2},$$

que se le llama función de Green de asociada al problema del semiplano.

Resulta

$$u(x, y) = [G(\cdot, y) * f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) G(z, y) dz = \int_{\infty}^{-\infty} f(z) G(x-z, y) dz \quad (17.4)$$

Ejercicio. Probar que

$$1) \quad \lim_{y \rightarrow 0} G(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) dx = 1$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$$

Interpretar G como solución de (17.3) con condición de borde $u(x, y) = \delta(x)$, e interpretar fórmula (17.4).

17.2. Uso de la transformada de Laplace

Esta sección fue extraída casi por completo del apéndice del libro [2], que aparece en la bibliografía.

Supondremos, en esta sección, que el lector está familiarizado con las nociones básicas relativas a la transformada de Laplace, la cual le asigna a una función $u(x, t)$, definida para $t \geq 0$, la función

$$U(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt \quad (17.5)$$

llamada transformada (de Laplace) de u .

Consideremos el problema de Cauchy

$$u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (17.6)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad -\infty < x < +\infty \quad (17.7)$$

Y supongamos que u, u_x, u_{xx} son continuas y acotadas.

Aplicando la transformada en (17.6), y teniendo en cuenta (17.7), se obtiene la ecuación

$$U_{xx}(x, s) - sU(x, s) = \phi(x) \quad (17.8)$$

que es una ecuación ordinaria en x . Si imponemos la condición de que U sea acotada, entonces (17.8) tiene una única solución, que es

$$U(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{s}|x-\xi|} \phi(\xi) d\xi \quad (17.9)$$

En realidad, la dificultad consiste en calcular la transformada inversa de U , para lo cual hay que calcular la transformada inversa de $(1/\sqrt{s})e^{-\sqrt{s}|x-\xi|}$. Como se sabe, esta integral se puede calcular evaluando la integral de (17.9) por un cálculo de residuos. Resulta que

$$u(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

Pasemos a aspectos más prácticos de la transformada de Laplace. Observemos, en primer lugar, que la variable de integración en (17.5) recorre el intervalo $[0, +\infty]$. Por esa razón, se requiere una variable independiente con ese recorrido para aplicar el método; lo usual es considerar el tiempo t en las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas; este método no resulta adecuado para las ecuaciones elípticas.

Al aplicar la transformada en (17.6), obtuvimos la ecuación ordinaria (17.8). Entonces, solo restan dos pasos esenciales:

- a) resolver el problema que queda planteado para la ecuación ordinaria, y
- b) calcular la transformada inversa

Aclaremos que si la ecuación original no es de coeficientes constantes, sino que éstos dependen de la variable que se escoge para la transformación (t en la fórmula (17.5)), entonces la ecuación transformada -si es que puede encontrarse- es también una EDP, que incluso puede ser de mayor orden que la original.

Veamos algún ejemplo típico en el que el procedimiento se aplica satisfactoriamente, teniendo en cuenta la existencia de tablas para la transformada (y, por lo tanto, para la transformada inversa).

Ejemplo 1. Resolver el problema

$$u_t + xu_x = x \quad x > 0, t > 0 \tag{17.10}$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \geq 0 \tag{17.11}$$

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq 0 \tag{17.12}$$

Por lo dicho antes, conviene tomar transformada respecto de t , utilizando (17.11), se obtiene

$$U'(s) + \frac{s}{x}U = \frac{1}{s}$$

Se integra esta ecuación (por ejemplo, multiplicando por el factor integrante x^s) y se obtiene

$$U(x, s) = \frac{K}{x^s} + \frac{x}{s}(s+1)$$

La constante de integración K puede evaluarse a partir de (17.12), ya que

$$U(0, s) = \int_0^\infty u(0, t)e^{-st} dt = 0$$

Para ello debe tomarse $K = 0$; así,

$$U(x, s) = \frac{x}{s(s+1)}$$

y aplicando la transformada inversa,

$$u(x, t) = x(1 - e^{-t})$$

Observación 17.2.1. Si aplicamos la transformada en este ejemplo, considerando a x como variable de integración (lo cual es posible, pues su recorrido es el mismo que el de t), se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial t}(s, t) - \frac{\partial}{\partial s}[su(s, t)] = \frac{1}{s^2}$$

y se observa que no hay ningún adelanto.

Ejemplo 2. Sea

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad (17.13)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (17.14)$$

$$u(0, t) = K \quad u_x(0, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (17.15)$$

Para simplificar cambiemos t por at ; con esto se obtiene.

$$u_t = u_{xx} \quad (17.16)$$

el resto de las condiciones no cambia.

Aplicando la transformada en (17.16), y usando (17.14), se obtiene

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = sU(x, s) \quad (17.17)$$

cuya solución general es

$$U(x, s) = A \cosh x\sqrt{s} + B \sinh x\sqrt{s} \quad (17.18)$$

Utilizando (17.15) en (17.5),

$$U(0, s) = \frac{K}{s} \quad U_x(l, s) = 0$$

Con estas condiciones pueden determinarse A y B en (17.18), por lo que resulta

$$U(x, s) = K \frac{\cosh(L-x)\sqrt{s}}{L \cosh L\sqrt{s}}$$

La transformada inversa de este tipo de funciones se obtiene como el desarrollo en serie siguiente (donde se ha regresado a la variable original):

$$u(x, t) = K \left\{ 1 - \left(\frac{4}{\pi} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 at / 4L^2} \cdot \text{sen}[(2n-1)\pi x / 2L] \right\}$$

que es la solución del problema planteado.

Observación 17.2.2. Lo usual en este método, como en el de Fourier y otros, no es verificar a priori las condiciones de su aplicabilidad (en esta caso, convergencia de la integral que define la transformada, etc), sino aplicarlo formalmente y después verificar si la presunta solución encontrada es tal.

17.3. Ejercicios

1. Resuelva los siguientes problemas utilizando la transformada de Laplace

a)

$$\begin{aligned}xu_t + u_x &= x & x > 0, t > 0 \\u(x, 0) &= 0 & x > 0 \\u(0, t) &= 0 & t \geq 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (1/k)u_t & x > 0, t > 0 \\u(x, 0) &= 0 & x \geq 0 \\u(0, t) &= u_0(\text{cte}) & t \geq 0, u \text{ está acotada}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (1/c^2)u_{tt} & 0 < x < L & t > 0 \\u(x, 0) &= 0 & u_t(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq L \\u(0, t) &= 0 & u_x(L, t) &= k(\text{cte}) & t \geq 0\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}u_{rr} + (1/r)u_r &= (1/k)u_t & 0 \leq r \leq R, t > 0 \\u(r, 0) &= 0 & 0 \leq r \leq R \\u(R, t) &= u_0(\text{cte}) & t \geq 0\end{aligned}$$

17.4. Problemas

Problema 17.1. La mezcla de dos fluidos en un tubo infinitamente largo puede modelarse a través de la ecuación de convección-difusión: $u_t = u_x + \alpha u_{xx}$, con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$.

(i) Probar que la transformada de Fourier $\hat{u}(s, t) = u(\cdot, t)(s)$ es igual a

$$\hat{u}(s, t) = \hat{f}(s) \exp(is - \alpha s^2)t.$$

(ii) Deducir que la solución puede expresarse como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)G(x - y, t)dy.$$

(iii) Determinar el núcleo de Green $G(x, t)$.

Problema 17.2. Resolver por Transformada de Fourier:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Problema 17.3. Se desea determinar la evolución de la temperatura $u(t, x)$ en una barra semi-infinita cuando hay transferencia de calor al medio circundante según el modelo

$$u_t = k u_{xx} - \gamma u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de difusividad térmica y $\gamma > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor. Suponga que la barra está aislada en $x = 0$, esto es

$$u_x(t, 0) = 0, \quad t > 0$$

y que la distribución inicial de temperaturas esta dada por una función $f(x)$, es decir

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Pruebe que u se puede expresar como $u(t, x) = [f(\cdot) * G(t, \cdot)](x)$ para una función $G(t, x)$ la cual se pide determinar usando el método de la transformada de Fourier.

Indicación: Extienda apropiadamente el problema a todo $-\infty < x < \infty$.

Problema 17.4. ¹ Para $h > 0$ constante, considere la ecuación

$$u_t = u_{xx} - h u_x, \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Use el método de la Transformada de Fourier (suponiendo que las transformadas existen) para demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - th + 2y\sqrt{t}) \exp(-y^2) dy.$$

Indicación: Pruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp((\alpha + is)^2) ds = \sqrt{\pi}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 17.5. ²

- (a) Sea $f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la antitransformada de Fourier de una función $\varphi = \varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Muestre que $f(x - x_0) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-isx_0}\varphi(s)](x)$. Deduzca que

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi(s) \cos(sx_0)](x) = \frac{1}{2}[f(x - x_0) + f(x + x_0)].$$

¹Examen. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

²Control 3. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

(b) Considere la ecuación de ondas

$$(EO) \quad \begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} & x \in \mathbb{R}; t > 0 \\ u(0, x) = \frac{1}{x^2 - 9} & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(b.i) Pruebe que la transformada de Fourier de $u(t, \cdot)$ está dada por

$$\hat{u}(t, s) = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(3|s|) \cos(4st).$$

(b.ii) Utilizando (a), calcule explícitamente la solución $u(t, x)$ de (EO).

Problema 17.6. ³

(a) Demuestre que la transformada de Fourier de la función $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ viene dada por:

$$\hat{f}(s) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}.$$

Indicación: Recuerde que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

(b) Las vibraciones $u = u(t, x)$ de una varilla infinita satisfacen la ecuación de elasticidad siguiente:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (\alpha > 0).$$

Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)| dx < \infty$ para $t > 0$, y que la varilla inicialmente se encuentra en reposo (i.e. $u_t(0, x) = 0$ para $-\infty < x < +\infty$) en la posición $u(0, x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

(i) Demuestre que la transformada de Fourier con respecto a x de la solución es:

$$\hat{u}(t, s) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|} \cos(\alpha s^2 t)$$

(ii) Concluya que la solución corresponde a:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} s e^{-s} \operatorname{sen}(sx) \cos(\alpha s^2 t) ds.$$

Problema 17.7. ⁴ Resuelva el problema diferencial

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - hu(x, y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 1$$

³Examen. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁴Examen Especial. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

donde $h > 0$, con condiciones de borde dadas por

$$u_x(0, y) = 0, \quad 0 < y < 1$$

y

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = f(x), \quad 0 < x < \infty$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < c, \\ 0 & x \geq c, \end{cases}$$

con $c > 0$.

Problema 17.8. ⁵

(a) Sea $f(x) = \exp(-a|x|)$. Pruebe que $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}$.

(b) Considere la ecuación de ondas

$$(EO) \quad \begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} & x \in \mathbb{R}; t > 0 \\ u(0, x) = \exp(-|x|) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pruebe que la transformada de Fourier de $u(t, \cdot)$ es $\hat{u}(t, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(4st) / [1 + s^2]$.

(c) Calcule la solución $u(t, x)$ de (EO). Indicación: puede usar el teorema de residuos de Cauchy, o bien las propiedades algebraicas de la TF.

Problema 17.9. ⁶

(i) Dado $a > 0$, calcule la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}.$$

(ii) Use transformada de Fourier para resolver

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < +\infty, 0 < y < 1, \\ u_y(x, 0) &= 0, & 0 < x < +\infty, \\ u_x(0, y) &= 0, & 0 < y < 1, \\ u(x, 1) &= 1/(x^2 + 4)^2, & 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

Problema 17.10. ⁷ Dados $\alpha > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, considere la EDP dada por:

$$u_t - \alpha u_{xx} + bu_x = 0 \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (17.19)$$

con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$. Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| dx < \infty$ para todo $t \geq 0$.

⁵Examen. Primavera 2001. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁶Control 3. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁷Examen. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Alberto Mercado

- Encuentre la función de Green $G(x, t)$ de (17.19). (i.e. tal que $u(x, t) = (f(\cdot) * G(\cdot, t))(x)$).
Indicación: use que $\widehat{g(x - x_0)}(s) = e^{-isx_0}\widehat{g}(s)$, y que $\mathcal{F}^{-1}(e^{-as^2})(x) = \frac{1}{2a}e^{-x^2/4a}$.
- Sea $y(x, t)$ solución $y_t - \alpha y_{xx} = 0$, $-\infty < x < \infty, t > 0$, con condición inicial $y(x, 0) = f(x)$. Pruebe que $u(x, t) = y(x - tb, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.
- Suponga que cuando $\alpha \rightarrow 0$, la función $u(x, t)$ (que depende de α) converge. Identifique la función límite.

Problema 17.11. ⁸

- Sea $f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$, con $a > 0$. Demuestre que $\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|s|}$.
- Sea $G(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$, con $x \in \mathbb{R}, y > 0$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, definamos

$$u(x, y) = G(\cdot, y) * f(\cdot) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{w^2 + y^2} f(x - w) dw = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - w)^2 + y^2} f(w) dw. \quad (17.20)$$

Verifique que $u(x, y)$ es solución de la siguiente EDP estacionaria en el semiplano superior:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) \rightarrow 0, & y \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (17.21)$$

Indicaciones:

- Calcule la transformada de Fourier en variable x de la función $u(x, y)$ dada en (17.20). Le será de ayuda el Teorema de convolución ($\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(s)\widehat{g}(s)$), y la transformada calculada en el inciso a).
- Tome transformada de Fourier -con respecto a x - en la ecuación (17.21) para convertirla en una EDO (más condición de borde). Verifique que este sistema es satisfecho por la función $\widehat{u}(s, y)$ encontrada en el inciso anterior.

17.5. Resolución de problemas

■ Solución Problema 17.10

Dados $\alpha > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, considere la EDP dada por:

$$u_t - \alpha u_{xx} + bu_x = 0 \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (17.22)$$

con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$. Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| dx < \infty$ para todo $t \geq 0$.

⁸Control 3. Otoño 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof. Alberto Mercado

1. Tomando transformada de Fourier en (17.22), tenemos la ecuación:

$$\widehat{u}_t + s^2 \alpha \widehat{u} + i s b \widehat{u} = 0 \quad (17.23)$$

cuya solución está dada por

$$\widehat{u}(s, t) = e^{(-\alpha s^2 - i b s)t} \widehat{u}(s, 0) = e^{(-s^2 - i b s)t} \widehat{f}(s)$$

y tomando la antitransformada tenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i x s} e^{(-\alpha s^2 - i b s)t} \widehat{f}(s) ds$$

Ahora, para usar el teorema de convolución, notemos que gracias a la indicación se sigue que $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\alpha(s^2 - i b s)t})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-(x - bt)^2 / (4\alpha t)}$. Entonces, del mencionado teorema se tiene que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x - bt - y)^2}{4\alpha t}} f(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x - y)^2}{4\alpha t}} f(y - bt) dy \end{aligned} \quad (17.24)$$

Lo anterior debe ser igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - y) f(y) dy$$

de donde deducimos que $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-(x - bt)^2 / (4\alpha t)}$.

2. Sea $y(x, t)$ solución de $y_t - \alpha y_{xx} = 0$, con $y(x, 0) = f(x)$.

Esta ecuación tiene función de Green, (vista en clase, y que se puede deducir de lo anterior tomando $b = 0$) dada por $G_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-x^2 / (4\alpha t)}$ de donde se sigue que $G(x, t) = G_0(x - tb, 0)$, de donde se obtiene que $u(x, t) = y(x - tb, t)$, teniendo en cuenta la definición de convolución.

Otra forma de probar esto (asumiendo que las soluciones son únicas) es verificar directamente que $y(x - bt, t)$ satisface la ecuación (17.22), y es por lo tanto igual a u .

3. Suponiendo que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u(x, t)$ existe, para identificar este límite, podemos observar que en la fórmula (17.24), α juega el mismo papel que t , por lo que al tomar $\alpha \rightarrow 0$ ocurre lo mismo que cuando $t \rightarrow 0$ en G_0 : aparece la delta de Dirac, por lo que el lado derecho de (17.24), cuando $\alpha \rightarrow 0$, resulta f evaluada en $y = x$. Es decir, el límite buscado es $f(x - bt)$.

Otra posibilidad es razonar que con $\alpha = 0$, se tiene que y satisface $y_t = 0$, con $y(x, 0) = f(x)$, de donde $y(x, t) = f(x)$ para todo $t \geq 0$. Con el inciso 2), deducimos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} u(x, t) = y(x - bt, t) = f(x - bt).$$

■ **Solución Problema 17.11**

1. Sea $f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$, con $a > 0$. Demuestre que $\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|s|}$.

Por definición se tiene que

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

La función $\frac{a}{x^2 + a^2}$ es un cociente de polinomios con grados 0 (en el numerador) y 2 (en el denominador), cuyos polos son $\{-ia, ia\}$.

Según el teorema visto en clase, para integrar con $-s > 0$ (i.e. $s < 0$) se debe tomar ia , y en el caso $s > 0$ se usa $-ia$. Es decir:

Si $s < 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} \frac{a}{x^2 + a^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{-isx} \frac{a}{z^2 + a^2}, ia\right) \\ &= 2\pi i \left(e^{sa} \frac{a}{2ia} \right) \\ &= \pi e^{sa} \end{aligned}$$

En el caso $s > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} \frac{a}{x^2 + a^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{-isx} \frac{a}{z^2 + a^2}, -ia\right) \\ &= -2\pi i \left(e^{-sa} \frac{a}{-2ia} \right) \\ &= \pi e^{-sa}. \end{aligned}$$

Por lo que en ambos casos (i.e. para toda $s \in \mathbb{R}$) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-isx} \frac{a}{x^2 + a^2} = \pi e^{-|s|a}. \quad (17.25)$$

de donde se tiene el resultado deseado. ■

2. Sea $G(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$, con $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, definamos

$$u(x, y) = G(\cdot, y) * f(\cdot) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{w^2 + y^2} f(x-w) dw = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-w)^2 + y^2} f(w) dw. \quad (17.26)$$

Verifique que $u(x, y)$ es solución de la siguiente EDP estacionaria en el semiplano superior:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) \rightarrow 0, & y \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (17.27)$$

Indicaciones:

- a) Calcule la transformada de Fourier en variable x de la función $u(x, y)$ dada en (17.26). Le será de ayuda el Teorema de convolución ($\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(s)\widehat{g}(s)$), y la transformada calculada en el inciso a).

Por el inciso a), la transformada de Fourier de G (con respecto a la variable x , considerando y como constante) está dada por

$$\widehat{G}(s, y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-y|s|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y|s|}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ y todo $y > 0$.

Entonces, por el teorema de la convolución se tiene

$$\widehat{u}(s, y) = \sqrt{2\pi}\widehat{G}(s, y)\widehat{f}(s) = e^{-|s|y}\widehat{f}(s) \quad (17.28)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ y todo $y > 0$.

- b) Tome transformada de Fourier -con respecto a x - en la ecuación (17.27) para convertirla en una EDO (más condición de borde). Verifique que este sistema es satisfecho por la función $\widehat{u}(s, y)$ encontrada en el inciso anterior.

Teniendo en cuenta que $\widehat{u_x x} = (is)^2\widehat{u} = -s^2\widehat{u}$, al aplicar transformada de Fourier en (17.27) resulta:

$$\begin{cases} -s^2\widehat{u} + \widehat{u_{yy}} = 0, & s \in \mathbb{R}, y > 0 \\ \widehat{u}(s, 0) = \widehat{f}(s), & s \in \mathbb{R} \\ \widehat{u}(s, y) \rightarrow 0, & y \rightarrow \infty, s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (17.29)$$

Verifiquemos que nuestra función dada por (17.28) resuelve este sistema:

- $\widehat{u_{yy}}(s, y) = \partial_y^2(e^{-|s|y})\widehat{f}(s) = s^2 e^{-|s|y}\widehat{f}(s) = s^2\widehat{u}(s, y)$,
- $\widehat{u}(s, 0) = e^0\widehat{f}(s) = \widehat{f}(s)$ y
- $\lim_{y \rightarrow \infty} \widehat{u}(s, y) = \widehat{f}(s) \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-|s|y} = 0$.

Por lo tanto se cumple el sistema.

Capítulo 18

Tópicos adicionales en EDPs

18.1. Definición de función armónica

Sea $f = u + iv$ una función holomorfa en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sabemos que entonces $u, v \in C^\infty(\Omega)$ y que, más aún, deben satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{en } \Omega. \quad (18.1)$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{en } \Omega.$$

Como, en virtud de la continuidad de las derivadas de orden superior, las derivadas cruzadas de v son iguales, deducimos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Definiendo el operador *Laplaciano*, denotado por Δ , aplicado a una función $w = w(x, y)$ de clase C^2 mediante

$$\Delta w := \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

concluimos que u satisface la *ecuación de Laplace* sobre Ω :

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Toda función de clase $C^2(\Omega)$ que satisface esta ecuación se dice que es una *función armónica* en Ω .

De manera análoga a lo realizado con u , se deduce que v también es armónica en Ω . Así, hemos probado:

Proposición 18.1.1. *Si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio Ω entonces u y v son funciones armónicas en Ω , es decir,*

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

18.2. Funciones armónicas conjugadas

Dos funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ se dicen *armónicas conjugadas* en un dominio Ω si la función de variable compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en Ω . En otros términos, $u, v \in C^2(\Omega)$ se dicen armónicas conjugadas ssi u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (18.1), y en particular se tiene $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω . Notemos que *a posteriori* dos funciones armónicas conjugadas son suaves: $u, v \in C^\infty(\Omega)$.

Un problema que surge inmediatamente es la determinación de una función armónica v que sea conjugada a una función armónica u dada.

Ejemplo 18.2.1. Consideremos la función $u(x, y) = xy$. Es directo verificar que u es armónica en \mathbb{R}^2 . De la segunda ecuación en (18.1), deducimos que si u admite una función armónica conjugada $v = v(x, y)$, ésta debe satisfacer

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x.$$

Luego $v(x, y) = -x^2/2 + g(y)$, para alguna función $y \mapsto g(y)$ por determinar. Para encontrar $g(y)$, imponemos la primera ecuación en (18.1):

$$y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x^2}{2} + g(y) \right) = g'(y),$$

de donde concluimos que $g(y) = y^2/2 + C$ para una constante $C \in \mathbb{R}$. De esta forma

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (18.2)$$

Es fácil verificar que, efectivamente, esta última función es armónica en \mathbb{R}^2 y, más aún, es conjugada a $u = xy$ para cada valor de $C \in \mathbb{R}$. Tomando por ejemplo $C = 0$, vemos que la función holomorfa $f = u + iv$ correspondiente es $f(z) = xy + i\frac{1}{2}(y^2 - x^2) = -\frac{i}{2}(2ixy + x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2$. \square

El método empleado en el ejemplo 18.2.1 es general: para encontrar funciones conjugadas a una función u que es armónica en todo \mathbb{R}^2 , basta con “integrar” las condiciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, cuando el dominio Ω no es todo el plano, puede pasar que no exista una función conjugada si no asumimos una hipótesis adicional sobre la naturaleza del dominio. Para ilustrar esto último, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 18.2.2. Sea $\Omega = D(0, 2) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 2\}$ y consideremos

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

Es directo verificar que u es armónica en Ω . En efecto, derivando se obtiene que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

y así

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

mientras que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Luego, $\Delta u = 0$ en Ω .

Supongamos que u admite una función armónica conjugada $v = v(x, y)$ en Ω , y definamos la función auxiliar $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(t) = v(\cos t, \sin t).$$

Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ y v está definida en $\Omega = D(0, 2) \setminus \{0\}$, la función φ está bien definida. Se tiene que

$$\varphi(0) = v(1, 0) = \varphi(2\pi). \quad (18.3)$$

Además, φ es diferenciable con

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\cos t, \sin t)(-\sin t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\cos t, \sin t) \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$$

Como u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, deducimos que también se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t, \sin t)(-\sin t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\cos t, \sin t) \cos t \\ &= \frac{2 \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{2 \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Integrando, tenemos que para todo $t \in [0, 2\pi]$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + 2t,$$

luego $\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2 > \varphi(0)$, lo que es imposible en virtud de (18.3). La contradicción proviene de suponer que u admite una función armónica conjugada en Ω .

En conclusión, $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ es armónica en $D(0, 2)$ pero no existe una función v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa en $D(0, 2) \setminus \{0\}$. \square

El problema con el ejemplo 18.2.2 es que el dominio $D(0, 2) \setminus \{0\}$ tiene un “hoyo”. Recordemos que un abierto no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice *simplemente conexo* si es conexo y si todo camino cerrado contenido en Ω no encierra puntos fuera de Ω .

Teorema 18.2.3. *Sea u una función armónica en un dominio simplemente conexo Ω . Entonces existe una función v armónica conjugada de u en Ω .*

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto arbitrario que permanecerá fijo. Definamos para todo $(x, y) \in \Omega$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r}, \quad (18.4)$$

donde $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}$ representa la integral sobre un camino cualquiera que va desde (x_0, y_0) a (x, y) .

Un camino que une (x_0, y_0) y (x, y) siempre existe en virtud de la conexidad de Ω . La función dada por (18.4) está bien definida pues el valor de la integral no depende del camino escogido. En efecto, si Γ_1 y Γ_2 son dos caminos que unen (x_0, y_0) y (x, y) entonces $\Gamma = \Gamma_1 \cup (\Gamma_2)^-$ es un camino cerrado, el cual sólo encierra puntos de Ω (pues Ω es simplemente conexo). Podemos entonces aplicar el teorema de Green en el plano para deducir que si $D \subset \Omega$ es la región encerrada por Γ entonces

$$\oint_{\Gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dx dy = \iint_D \Delta u dx dy = 0, \quad (18.5)$$

donde la última integral se anula pues el integrando es idénticamente 0 (recordemos que u es armónica en Ω). Como, con abuso de notación, se tiene

$$\oint_{\Gamma} = \oint_{\Gamma_1 \cup (\Gamma_2)^-} = \int_{\Gamma_1} + \int_{(\Gamma_2)^-} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2},$$

de (18.5) se deduce que

$$\int_{\Gamma_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r},$$

lo que prueba nuestra afirmación.

La función v definida por (18.4) es continua. Más aún, utilizando caminos adecuados, se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot d\vec{r} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x+t, y)\right) dt.$$

Como las derivadas parciales de u son continuas, se deduce que

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

que es justamente la segunda de las condiciones de Cauchy-Riemann (18.1). Similarmente, se prueba que el par u, v satisface la primera condición en (18.1). Por lo tanto, $v \in C^2(\Omega)$ (pues u lo es) y se deduce que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω , lo que prueba el resultado. \square

La fórmula integral (18.4) proporciona una herramienta útil para encontrar una función conjugada v de una función armónica u en un simplemente conexo.

Ejemplo 18.2.1 (continuación). Consideremos la función $u = xy$, que es armónica en \mathbb{R}^2 . Tomemos $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y definamos

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-x' dx' + y' dy').$$

Notemos que $v(0, 0) = 0$. Como podemos escoger el camino de $(0, 0)$ a (x, y) , tomamos aquel más simple para la integración. En este caso, como el dominio para u es todo el plano y el integrando es un polinomio en las coordenadas cartesianas, tomamos el camino como la unión de dos segmentos de recta, el primero que une $(0, 0)$ con $(x, 0)$ (parametrizado por $\vec{r}(x') = (x', 0)$, $x' \in [0, x]$) y el segundo que une $(x, 0)$ con (x, y) (parametrizado por $\vec{r}(y') = (x, y')$, $y' \in [0, y]$). Así

$$v(x, y) = \int_0^x -x' dx' + \int_0^y y' dy' = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{y^2 - x^2}{2},$$

que no es otra cosa que la función obtenida en (18.2) con $C = 0$. \square

18.3. Propiedad de la media y fórmula integral de Poisson

Podemos utilizar la teoría de funciones holomorfas para deducir propiedades de las funciones armónicas. Un ejemplo interesante lo constituye el siguiente resultado.

Proposición 18.3.1. *Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica en un abierto Ω no vacío. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $D((x_0, y_0), \rho) \subset \Omega$. Entonces, para todo $R \in (0, \rho)$,*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta. \quad (18.6)$$

Demostración. En virtud del teorema 18.2.3, u admite una función armónica conjugada v en el disco $D((x_0, y_0), \rho)$, que evidentemente es simplemente conexo. Dado $0 < R < \rho$, podemos aplicar el teorema 10.1.1 a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ para deducir de la fórmula de Cauchy (10.1) con $p = z_0 = x_0 + iy_0$ que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta,$$

o equivalentemente

$$u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(z_0 + Re^{i\theta}) + iv(z_0 + Re^{i\theta})] d\theta.$$

Igualando las partes reales en esta ecuación, obtenemos (18.6). \blacksquare

La ecuación (18.6) asegura que el valor de la función armónica u en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$ es igual a la media de los valores que toma sobre la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R . En realidad, la fórmula integral de Cauchy (10.1) proporciona más información pues permite evaluar la función holomorfa en todo punto interior al disco $D(z_0, R)$. Tomemos u como en el enunciado de la proposición 18.3.1, y sea $R \in (0, \rho)$ y $f = u + iv$ holomorfa en $D(z_0, \rho)$. De (10.1) se deduce que para todo $z \in D(z_0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Utilizando notación polar $z = z_0 + re^{i\theta}$ (con $r < R$), $w = z_0 + Re^{i\phi}$ de modo tal que $dw = Rie^{i\phi}d\phi$, y $f(r, \theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$ (análogo para $f(R, \phi)$), podemos escribir

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} Rie^{i\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} \frac{Re^{-i\phi} - re^{-i\theta}}{Re^{-i\phi} - re^{-i\theta}} Re^{i\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)(R^2 - rRe^{i(\phi-\theta)})}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi. \end{aligned}$$

Escribiendo $f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ e igualando las partes reales, obtenemos

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R, \phi)(R^2 - rR \cos(\phi - \theta)) + v(R, \phi)rR \operatorname{sen}(\phi - \theta)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi.$$

El inconveniente de esta última fórmula es que en el integrando aparece la función armónica conjugada de u . Para tener una fórmula donde sólo intervenga explícitamente u , procedemos como sigue. Comencemos por notar que podemos factorizar el denominador del integrando como

$$R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta) = (re^{i\phi} - Re^{i\theta})(re^{-i\phi} - Re^{-i\theta}).$$

Entonces, sumando y restando r^2 ,

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)(r^2 - rRe^{i(\phi-\theta)})}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi.$$

Pero $r^2 - rRe^{i(\phi-\theta)} = (re^{-i\phi} - Re^{-i\theta})re^{i\phi}$, y en consecuencia

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)(r^2 - rRe^{i(\phi-\theta)})}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)}{Re^{i\phi} - (R^2/r)e^{i\theta}} Re^{i\phi} d\phi = \frac{1}{i} \oint_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(w)}{w - \hat{z}} dw,$$

donde $\hat{z} = z_0 + (R^2/r)e^{i\theta}$. Como $|\bar{z} - z_0| = r < R$, deducimos que $|\hat{z} - z_0| > R$. Luego, la función $h(w) = \frac{f(w)}{w - \hat{z}}$ es holomorfa en $D(z_0, |\hat{z} - z_0|) \supsetneq D(z_0, R)$ y, en virtud del teorema 9.3.3 de Cauchy-Goursat, deducimos que

$$\oint_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(w)}{w - \hat{z}} dw = 0.$$

Recapitulando, hemos probado que

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \phi)(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi,$$

de donde se deduce que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R, \phi)(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\phi - \theta)} d\phi,$$

que se conoce como *fórmula integral de Poisson*. Notemos que cuando $r = 0$, se recupera (18.6).

18.4. Propiedad de la media para funciones armónicas

Consideremos un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en Ω , es decir

$$u \in C^2(\Omega), \quad \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Dado un punto $p \in \Omega$ la bola

$$B_R(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < R\}$$

está contenida en Ω si $R > 0$ es suficientemente pequeño.

Definamos la función

$$f(r) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} u(x) dA(x), \quad r \in [0, R]$$

donde α_n es el área del manto de la esfera de radio 1 en \mathbb{R}^n y $\alpha_n r^{n-1}$ corresponde al área del manto de la esfera de radio r . La cantidad $f(r)$ es el promedio de la función u sobre la esfera con centro p y radio r .

Nuestro objetivo es calcular la derivada de f , y para tal efecto conviene introducir un cambio de variables

$$f(r) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(p + ry) dA(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr}(r) &= \frac{d}{dr} \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} u(p + ry) dA(y) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{dr} u(p + ry) dA(y) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(p + ry) \cdot y dA(y) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(p + ry) \cdot \hat{n} dA(y) \end{aligned}$$

ya que sobre la superficie $\partial B_1(0)$ se tiene $\hat{n}(y) = y$. Por lo tanto, cambiando de variables nuevamente

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr}(r) &= \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial u}{\partial n} dA \\ &= \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{B_r(p)} \Delta u \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que u es armónica. Luego f es constante y para averiguar cuál es esta constante observemos que

$$\begin{aligned} |f(r) - u(p)| &= \left| \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} (u(x) - u(p)) dA(x) \right| \\ &\leq \max_{x \in \overline{B_r(p)}} |u(x) - u(p)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

debido a la continuidad de u .

Hemos probado así

Teorema 18.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces si $p \in \Omega$ y $B_R(p) \subset \Omega$ se tiene*

$$u(p) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} u dA, \quad \forall 0 < r < R,$$

y

$$u(p) = \frac{n}{\alpha_n r^n} \int_{B_r(p)} u dV, \quad \forall 0 < r < R.$$

La segunda igualdad se deduce de multiplicar la primera por r^{n-1} e integrar. Observemos que la primera de estas fórmulas dice que si u es armónica entonces $u(p)$ es igual al promedio de u sobre la esfera $\partial B_r(p)$ y la segunda afirma que $u(p)$ es igual al promedio de u sobre la bola $B_r(p)$.

18.5. Principio del máximo para funciones armónicas

Teorema 18.5.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y sea $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no constante. Entonces u no alcanza su máximo ni su mínimo en Ω .*

Demostración. Supongamos que u alcanza su máximo en Ω , es decir, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x) \leq u(x_0) \quad \forall x \in \Omega.$$

Consideremos $R > 0$ tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$. Entonces para todo $0 < r < R$ por la fórmula de la media deducimos que

$$0 = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x_0) - u(x)) dA(x).$$

Pero por hipótesis $u(x_0) - u(x) \geq 0$ para todo $x \in \partial B_r(x_0)$ por lo que $u(x_0) - u(x) = 0$ para todo $x \in \partial B_r(x_0)$ (si $u(x_0) - u(x) > 0$ para algún punto $x \in \partial B_r(x_0)$ la integral resultaría positiva.)

Esto muestra que $u(x) = u(x_0)$ para todo $x \in B_R(x_0)$. Veamos ahora que $u(x) = u(x_0)$ para todo $x \in \Omega$. Recordemos que dado $\bar{x} \in \Omega$ como Ω es conexo existe un camino γ continuo que une x_0 con \bar{x} y que está contenido en Ω . Utilizando el hecho que Ω es abierto y el camino γ es compacto se puede encontrar una secuencia finita de puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m = \bar{x}$ en γ y $R > 0$, tales que las bolas $B_R(x_k)$ $k = 0, 1, \dots, m$ están contenidas en Ω y $x_{k+1} \in B_R(x_k)$ para $k = 0, 1, \dots, m-1$. Hemos probado que $u(x) = u(x_0)$ para todo $x \in B_{R_0}(x_0)$ y luego $u(x_1) = u(x_0) = \max_{\Omega} u$. Repitiendo el argumento anterior se encuentra que $u(x) = u(x_1)$ para todo $x \in B_R(x_1)$, y por inducción se prueba que $u(\bar{x}) = u(x_0)$. Luego u es constante en Ω , lo cual es una contradicción.

Mediante una demostración análoga se prueba que u no puede alcanzar su mínimo en Ω . ■

Corolario 18.5.2. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, conexo y acotado y que $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y armónica en Ω . Entonces*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

y

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Recordemos que $\bar{\Omega}$ denota la adherencia de Ω .

Demostración. Bajo las hipótesis de este corolario, el máximo de u se alcanza en algún punto $x_0 \in \bar{\Omega}$. Si $x_0 \in \Omega$ por el teorema anterior u es constante y (18.8) es cierto. Si $x_0 \in \partial\Omega$ vemos que (18.8) también vale. ■

El teorema 18.5.1 es más fuerte que el corolario 18.5.2, ya que mientras este último resultado dice que si u es armónica entonces u siempre alcanza un máximo en Ω , el teorema afirma que si el máximo se llegara a alcanzar dentro de Ω entonces u sería constante. Por este motivo al primero de estos resultados se le llama el principio del máximo fuerte, mientras que al segundo se le dice principio del máximo débil.

18.6. Principio del máximo para la ecuación del calor

Consideramos la ecuación del calor en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierta y acotada. En realidad, la región donde se plantea la ecuación del calor es

$$Q_T = (0, T) \times \Omega,$$

donde $T > 0$.

Supondremos que $u = u(t, x)$ está definida para $(t, x) \in \bar{Q}_T$ y que u es una función continua en \bar{Q}_T y $C^2(Q_T)$. Diremos que u satisface la ecuación del calor si

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) \quad \forall (t, x) \in Q_T = (0, T) \times \Omega. \quad (18.7)$$

Definamos

$$\Gamma_T = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega).$$

Intuitivamente Q_T es un cilindro no uniforme con base igual a Ω y altura T , y Γ_T es una parte de la frontera de Q_T que corresponde a la base y el manto lateral (sin incluir la “tapa” superior).

Teorema 18.6.1. *Sea $u : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u \in C^2(Q_T)$ que satisface la ecuación del calor (18.7) en Q_T . Entonces*

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u, \quad (18.8)$$

y

$$\min_{\overline{Q}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

Observación 18.6.2. *Este teorema se conoce como el principio del máximo débil para la ecuación del calor y establece que el máximo de u siempre se alcanza en algún punto de Γ_T . En otras palabras el comportamiento de u sólo toma en cuenta los valores de esta función en Γ_T , es decir los valores en el instante inicial ($t = 0$) y los valores en el borde de Ω para todo $t \in (0, T)$. Esto concuerda con la noción de que la variable t representa el tiempo, y que lo que ocurre en el tiempo $t = T$ viene descrito por la condiciones del problema.*

Demostración. Probaremos que si $0 < S < T$ entonces

$$\max_{\overline{Q}_S} u = \max_{\Gamma_S} u.$$

La conclusión se obtiene luego haciendo $S \nearrow T$. Supongamos que $\max_{\overline{Q}_S} u$ se alcanza en un punto (t_0, x_0) que no pertenece a Γ_S . Entonces, gracias a las condiciones necesarias de optimalidad sabemos que $\nabla_x u(t_0, x_0) = 0$, la matriz Hessiana $\nabla^2 u(t_0, x_0)$ es semi-definida negativa y $u_t(t_0, x_0) \geq 0$. Tomando la traza de $\nabla^2 u(t_0, x_0)$ vemos que $\Delta u(t_0, x_0) \leq 0$, por lo que

$$u_t(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) \geq 0.$$

Esto no es suficiente para una demostración pero sólo falta un pequeño *truco*. En efecto, consideremos $\varepsilon > 0$ y la función

$$v(t, x) = u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2.$$

v es continua en \overline{Q}_S y por lo tanto $\max_{\overline{Q}_S} v$ se alcanza, digamos en $(t_1, x_1) \in \overline{Q}_S$. Si (t_1, x_1) no pertenece a Γ_S repitiendo el argumento anterior podemos afirmar que $\Delta v(t_1, x_1) \leq 0$ y $v_t(t_1, x_1) \geq 0$, por lo que

$$v_t(t_1, x_1) - \Delta v(t_1, x_1) \geq 0.$$

Pero un cálculo directo muestra que

$$v_t(t_1, x_1) - \Delta v(t_1, x_1) = u_t(t_1, x_1) - \Delta u(t_1, x_1) - 2n\varepsilon = -2n\varepsilon < 0,$$

lo que es una contradicción. Hemos probado que necesariamente $(t_1, x_1) \in \Gamma_S$, por lo que

$$\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} (u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2) = \max_{(t,x) \in \Gamma_S} (u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2).$$

De aquí se deduce

$$\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} u(t,x) \leq \max_{(t,x) \in \Gamma_S} (u(t,x) + \varepsilon \|x\|^2) \leq \left(\max_{(t,x) \in \Gamma_S} u(t,x) \right) + \varepsilon \left(\max_{(t,x) \in \Gamma_S} \|x\|^2 \right)$$

y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} u(t,x) \leq \max_{(t,x) \in \Gamma_S} u(t,x).$$

La desigualdad $\max_{(t,x) \in \overline{Q}_S} u(t,x) \geq \max_{(t,x) \in \Gamma_S} u(t,x)$ es siempre cierta dado que $\Gamma_S \subset \overline{Q}_S$. Esto prueba (18.8). ■

18.7. Unicidad para la ecuación de Laplace y el calor

Teorema 18.7.1. *Sea Ω una región abierta y acotada en \mathbb{R}^n , y sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Entonces existe a lo más una función u en $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. Si u_1, u_2 son dos soluciones del problema anterior, entonces $u = u_1 - u_2$ satisface $\Delta u = 0$ en Ω y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Es decir u es armónica en Ω y por el principio del máximo (corolario 18.5.2) se deduce que $u \equiv 0$ en Ω . ■

Teorema 18.7.2. *Sea Ω una región abierta y acotada en \mathbb{R}^n , y sean $f : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : (0, T) \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Entonces existe a lo más una función u en $C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^2((0, T) \times \Omega)$ solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

La demostración es una aplicación directa del teorema 18.6.1.

18.8. Ejercicios

1. Verifique que las siguientes funciones son armónicas en todo \mathbb{R}^2 y encuentre funciones armónicas conjugadas para cada una de ellas:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2$.

b) $u(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$.

c) $u(x, y) = e^x \cos y + x^3 - 3xy^2 + 2y$.

- d) $u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$.
2. Suponga que $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son dos funciones armónicas conjugadas en un dominio Ω . Demuestre que las siguientes funciones son armónicas en Ω :
- a) $f(x, y) = u(x, y)v(x, y)$.
- b) $g(x, y) = e^{u(x,y)} \cos v(x, y)$.
- c) $h(x, y) = \cos u(x, y) \sinh v(x, y)$.
3. Calcule el valor de la integral $\int_0^{2\pi} \cos(\sin \theta) \cosh(\cos \theta) d\theta$.

18.9. Problemas

Problema 18.1. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Considere los campos en \mathbb{R}^3 definidos por $F = v\hat{i} + u\hat{j}$, y $G = u\hat{i} - v\hat{j}$.

1. Pruebe que F y G son conservativos si y sólo si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann. En tal caso decimos que u y v son funciones *conjugadas*.
2. Pruebe que si u y v son funciones conjugadas y de clase C^2 , entonces $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$, (diremos que u y v son *armónicas*). Pruebe además que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
3. Si u es armónica, pruebe que existe una función v conjugada de u .
Indicación: Esto es equivalente a probar que cierto campo es conservativo.

Problema 18.2. ¹ Dada $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con u y v funciones de clase C^2 en \mathbb{R}^2 , definimos $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$. Decimos que f es una función armónica compleja si $\Delta f = 0$. Demuestre que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas complejas.

Problema 18.3.

De una demostración del teorema de unicidad para la ecuación de Laplace (teorema 18.7.1) bajo la hipótesis que u_1, u_2 son soluciones de clase $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

utilizando el siguiente esquema

- a) Pruebe la siguiente fórmula: si $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ entonces

$$\int_{\Omega} \Delta uv = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad (18.9)$$

donde n es el vector unitario normal a la frontera de Ω .

Indicación: utilice el teorema de la divergencia con el campo vectorial $v\nabla u$.

¹Control 2. Otoño 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof:Alberto Mercado

- b) Pruebe que si $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en Ω y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ entonces aplicando la fórmula anterior se deduce que $\nabla u = 0$ en Ω y concluya.

Problema 18.4. Pruebe el principio del máximo débil (corolario 18.5.2) en el siguiente caso: si $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces

$$u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Siga los siguientes pasos:

- a) Construya una función $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 con la siguientes propiedades
- i) $\rho(t) = 0$ para todo $t \leq 0$,
 - ii) $\rho(t) > 0$ para todo $t > 0$.
- b) Aplique la fórmula (18.9) a $v = \rho \circ u$ y deduzca que si $x \in \Omega$ y $u(x) > 0$ entonces $\nabla u(x) = 0$.
- c) Podemos suponer que Ω es conexo. Supongamos que existe un punto $x \in \Omega$ con $u(x) > 0$ y sea γ un camino diferenciable con $\gamma(t) \in \Omega$ para $t \in (0, 1]$, $\gamma(0) = x_0 \in \partial\Omega$ y $\gamma(1) = x$. Sea t_1 el último t donde $u(\gamma(t)) = 0$, en otras palabras

$$t_1 = \sup\{t \in [0, 1] : u(\gamma(t)) = 0\}$$

Observe que $u(\gamma(t_1)) = 0$ y por la parte anterior $\frac{d}{dt}u(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in (t_1, 1)$. Concluya.

Problema 18.5. Para la ecuación del calor también es posible probar el teorema de unicidad y el principio del máximo débil *integrando por partes*. Para el teorema de unicidad puede proceder del siguiente modo: suponga que $u \in C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^2((0, T) \times \Omega)$ satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Defina

$$E(t) = \int_{\Omega} |\nabla u(t, \cdot)|^2$$

y pruebe que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2 \int_{\Omega} u_t(t, \cdot)^2 \leq 0.$$

(∇ se refiere solo a las variables espaciales.) Deduzca que si $u_0 \equiv 0$ entonces $\nabla u(t, \cdot) \equiv 0$ y concluya.

18.10. Resolución de problemas

- **Solución Problema 18.2** Como es usual, escribiremos $z = x + iy$ la variable compleja, y las funciones

$$f(z) = u + iv, \text{ con } u = u(x, y) \text{ y } v = v(x, y).$$

Denotaremos las derivadas de la forma $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $v_{yy} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, etc.

Antes que todo, calculemos $\Delta(zf(z))$: Se tiene que

$$\begin{aligned} zf(z) &= (x + iy)(u + iv) \\ &= xu - yv + i(yu + xv) \end{aligned}$$

Denotando $w = xu - yv$, $q = yu + xv$ (las partes real y compleja de $zf(z)$), se tiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = xu_x + u - yv_x$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = xu_{xx} + u_x + u_x - yv_{xx}$$

$$= xu_{xx} + 2u_x - yv_{xx}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = xu_y - yv_y - v$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = xu_{yy} - yv_{yy} - v_y - v_y$$

$$= xu_{yy} + -yv_{yy} - 2v_y$$

de donde se tiene

$$\begin{aligned} \Delta w &= x(u_{xx} + u_{yy}) - y(v_{xx} + v_{yy}) + 2(u_x - v_y) \\ &= x\Delta u - y\Delta v + 2(u_x - v_y). \end{aligned} \tag{18.10}$$

Y por otra parte:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = yu_x + xv_x + v$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = yu_{xx} + xv_{xx} + v_x + v_x$$

$$= yu_{xx} + xv_{xx} + 2v_x$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = yu_y + u + xv_y$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = yu_{yy} + u_y + u_y + xv_{yy}$$

$$= yu_{yy} + 2u_y + xv_{yy}$$

de donde se tiene

$$\begin{aligned}\Delta q &= yu_{xx} + xv_{xx} + 2v_x + yu_{yy} + 2u_y + xv_{yy} \\ &= y\Delta u + x\Delta v + 2(u_y + v_x).\end{aligned}\tag{18.11}$$

En conclusión :

$$\begin{aligned}\Delta(zf(z)) &= \Delta w + i\Delta q \\ &= x\Delta u - y\Delta v + 2(u_x - v_y) + i(y\Delta u + x\Delta v + 2(u_y + v_x)).\end{aligned}\tag{18.12}$$

Ahora, probemos lo que se nos pide:

(\implies)

Si f es holomorfa, entonces u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0\end{aligned}$$

ya que u y v son de clase C^2 . De esto se deduce que $\Delta f = 0$ y por tanto f es **armónica compleja**.

Por otra parte, también gracias a CR se tiene en (18.12) que $u_x - v_y = 0$ y $u_y + v_x = 0$, y como acabamos de probar que $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$, se sigue que:

$$\Delta(zf(z)) = 0$$

i.e. $zf(z)$ es **armónica compleja**.

(\impliedby)

Supongamos que f y $zf(z)$ son armónicas complejas. Esto quiere decir que

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = \Delta q = 0$$

(donde w y q son la parte real e imaginaria de $zf(z)$, como arriba).

Entonces las partes real e imaginaria en (18.12) son cero, de donde se sigue que

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0$$

que son justamente las ecuaciones de Cauchy- Riemann, y como u y v son de clase C^2 (en todo \mathbb{R}^2), se sigue que f es holomorfa.

Parte V

Apéndice

Apéndice A

Curvas en \mathbb{R}^3

A.1. Curvas

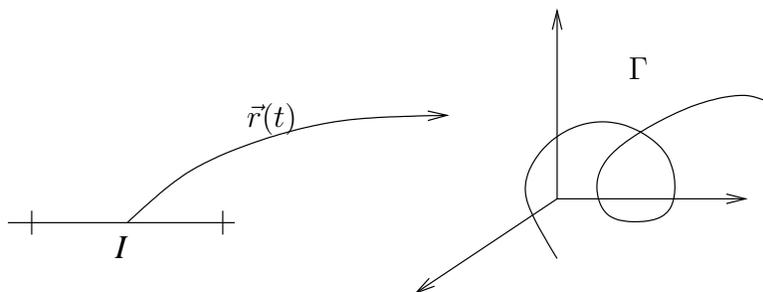
Denotamos por \mathbb{R}^n el espacio n -dimensional dotado de la norma euclidiana:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

La noción de curva es la formalización matemática de la idea intuitiva de la trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio. Por esta razón los casos $n = 2$ y $n = 3$ juegan un rol principal en lo que sigue.

Definición A.1.1 (Curva). *Diremos que un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamada parametrización de la curva, tal que*

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}.$$



Además, diremos que una curva Γ es

- 1) *Suave*: si admite una parametrización de clase \mathcal{C}^1 .
- 2) *Regular*: si admite una parametrización $\vec{r}(\cdot)$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| > 0$, para todo $t \in I$.
- 3) *Simple*: si admite una parametrización de clase \mathcal{C}^1 que sea inyectiva (i.e. no hay puntos múltiples).

- 4) *Cerrada*: si admite una parametrización $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- 5) *Cerrada simple*: si admite una parametrización $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.

Ejemplo A.1.2. Se define la *cicloide* como la curva descrita por un punto solidario a una rueda (de radio R) que gira sin resbalar.

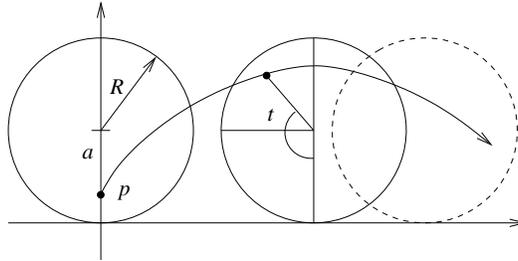


Figura A.1: cicloide

Su parametrización viene dada por

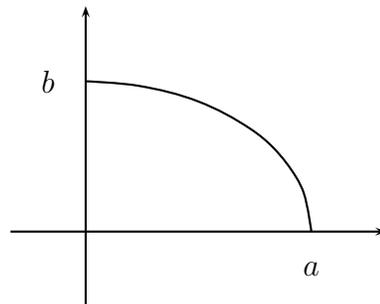
$$\vec{r}(t) = (Rt, R) - (a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t) = (Rt - a \operatorname{sen} t, R - a \operatorname{cos} t),$$

donde a es la distancia del punto al centro de la rueda.

Notemos que cuando $a < R$ la trayectoria es simple y regular, mientras que en el caso $a > R$ deja de ser simple aunque sigue siendo regular.

El caso crítico es $a = R$, pues para este valor la trayectoria es simple pero no es regular (justifique). Es importante observar que la parametrización es siempre suave, a pesar de que la curva presenta “puntas”; de hecho, es esto último lo que obliga a pasar por esos puntos con velocidad nula.

Ejemplo A.1.3. La función $\vec{r}(t) = (a \operatorname{cos} t, b \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi/2]$ parametriza el cuarto de elipse que se ve a continuación



Esta curva se puede parametrizar también mediante $\vec{r}_1(x) = (x, b\sqrt{1 - (x/a)^2})$, $x \in [0, a]$.

Ejemplo A.1.4. La función $\vec{r}(t) = (a \operatorname{cos} t, a \operatorname{sen} t, \frac{ht}{2\pi})$, $t \in [0, 4\pi]$ parametriza una *hélice*, que realiza 2 vueltas llegando a una altura $2h$, como se ve en la próxima figura.

Podemos pensar que la hélice es una trayectoria que sigue el contorno de un cilindro dado (en este caso de radio a y altura $2h$).

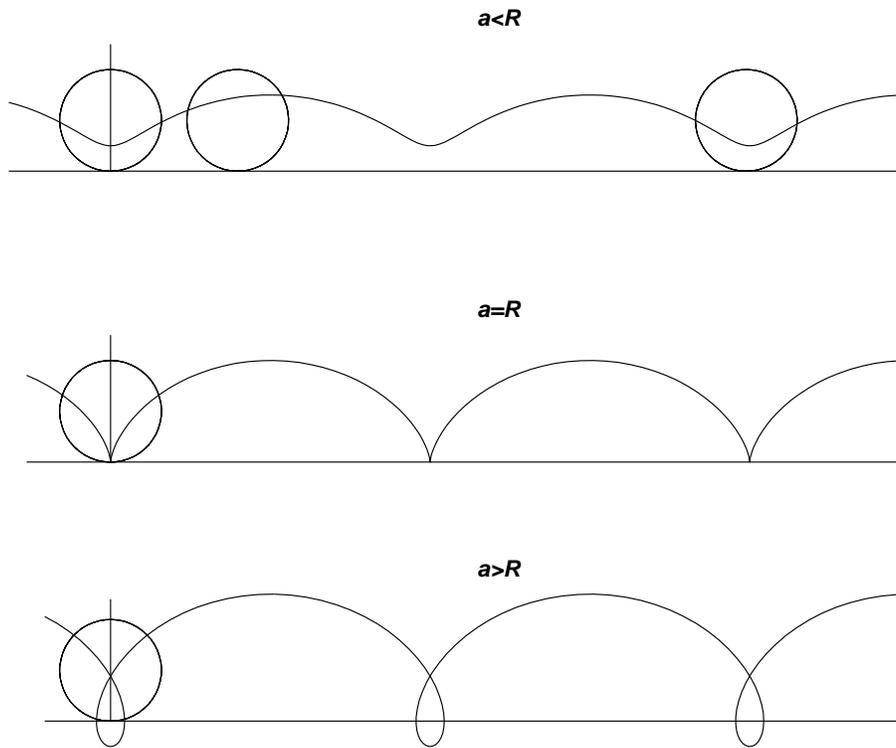
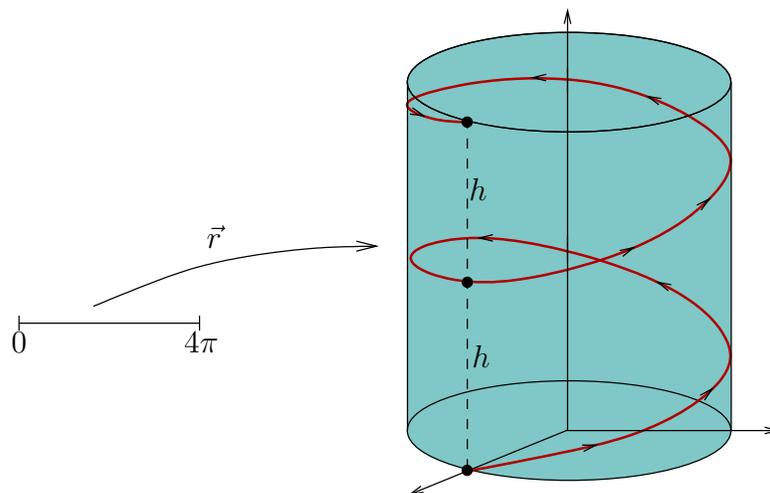


Figura A.2: trayectoria de la cicloide para distintos valores de a .



Insistamos que una curva Γ es un conjunto, que no debe confundirse con la parametrización que la define. De hecho, una curva admite muchas parametrizaciones tal como vimos en el ejemplo A.1.3. Intuitivamente, esto se explica porque una misma curva puede recorrerse de diferentes maneras y con distintas velocidades.

A.1.1. Reparametrización de curvas regulares

Definición A.1.5. *Dos parametrizaciones $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una misma curva Γ se dicen equivalentes si existe una función biyectiva $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\theta(t))$ para todo $t \in [a, b]$. En este caso, la función θ se llamará reparametrización.*

Una función continua y biyectiva θ definida en un intervalo será necesariamente creciente o decreciente. En el primer caso diremos que la reparametrización preserva la orientación pues dos parametrizaciones tales que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \theta$ recorren la curva en el mismo sentido. En el segundo caso, esto es, cuando la reparametrización es decreciente, entonces diremos que la orientación se invierte. De esta forma, dos parametrizaciones equivalentes o bien preservan la orientación o bien la invierten, pero no puede darse un caso intermedio.

La definición anterior conlleva naturalmente a preguntarnos lo siguiente:

- (1) ¿Son todas las parametrizaciones de una misma curva necesariamente equivalentes?
- (2) En caso afirmativo, ¿existe alguna parametrización más “natural” que las otras?

La respuesta a (1) es en general no, como lo muestra la siguiente curva y las dos parametrizaciones que se indican a continuación y cuyas orientaciones no son comparables respecto a la orientación (no podemos decir ni que se preserve ni que se invierte).

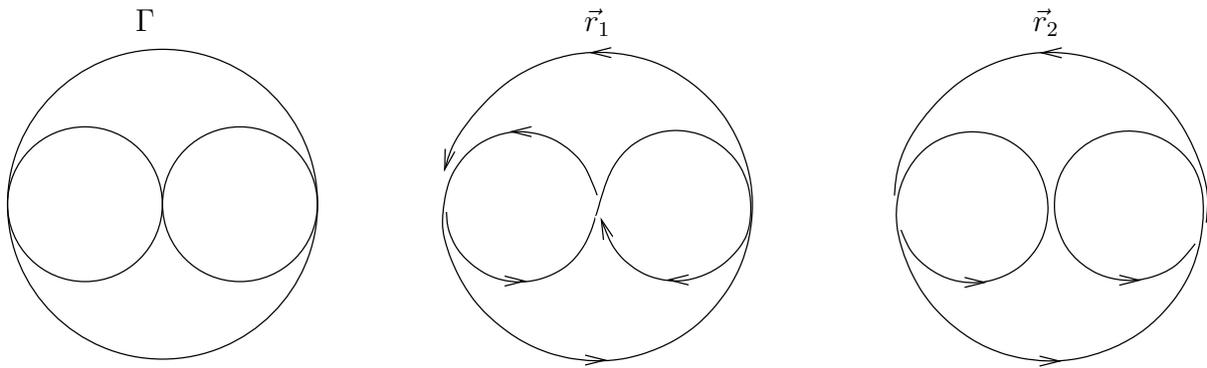


Figura A.3: Parametrizaciones no equivalentes para la misma curva Γ

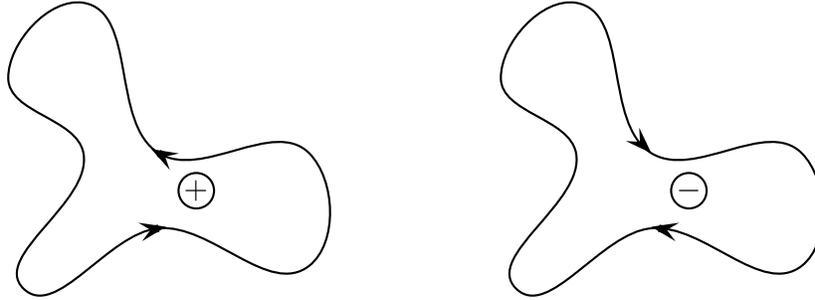
Sin embargo, se tiene el siguiente resultado que admitiremos sin demostración.

Proposición A.1.6. *Sea Γ una curva simple y regular. Si Γ no es cerrada, entonces todas sus parametrizaciones regulares son inyectivas y equivalentes. Cuando Γ es una curva cerrada, se tiene que todas sus parametrizaciones inyectivas en el interior de su dominio son equivalentes.*

En esta situación, una parametrización regular \vec{r} separa en dos al conjunto de parametrizaciones regulares:

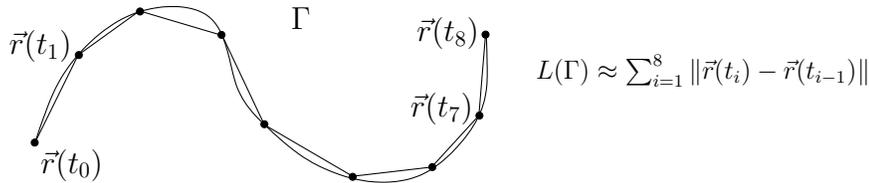
- Las que tienen la misma orientación que \vec{r} (que llamaremos *orientación positiva*), y
- Las que tienen la orientación opuesta (que se llamara *orientación negativa*).

Evidentemente las nociones de orientación positiva y negativa quedan determinadas por la parametrización inicial que sirve de referencia. Existe sin embargo una convención en el caso de curvas planas cerradas y simples, esta es el escoger la orientación positiva como aquella obtenida al recorrer la curva en sentido *antihorario* (i.e. contrario a las manecillas del reloj), tal como se ilustra en la siguiente figura.



A.1.2. Parametrización en longitud de arco

Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Con el fin de definir la “longitud” de Γ procedemos a aproximarla por una poligonal a través de los puntos $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \dots, \vec{r}(t_N)$ donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ es una malla de puntos.



Intuitivamente, cuando el paso de la partición $\Delta(\{t_i\}) = \max_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i)$ tiende a cero, la longitud de la poligonal converge hacia el largo de la curva Γ . En efecto, se cumple el siguiente resultado:

Proposición A.1.7. La suma $\sum_{i=0}^{N-1} \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|$ converge, cuando el paso de la partición $\Delta(\{t_i\})$ tiende a cero, hacia la integral $\int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$.

Este resultado nos permite introducir la siguiente definición:

Definición A.1.8. Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Definimos la longitud de Γ mediante

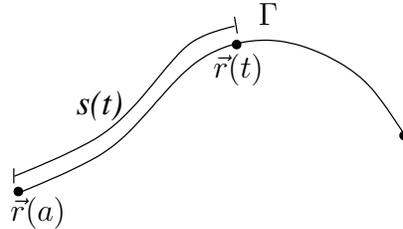
$$L(\Gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \tag{A.1}$$

El valor de esta integral no depende de la parametrización regular \vec{r} que se escoja para describir Γ , y por lo tanto el largo de Γ está bien definido.

Sea Γ una curva simple y regular, y $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Definimos la función longitud de arco $s: [a, b] \rightarrow [0, L(\Gamma)]$ como

$$s(t) := \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau \quad (\text{A.2})$$

De acuerdo a lo anterior, $s(t)$ es la longitud del camino recorrido sobre Γ por la parametrización hasta el instante t , tal como lo ilustra la figura.



Claramente, $s(\cdot)$ resulta ser una función de clase \mathcal{C}^1 con

$$\frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| > 0$$

En consecuencia, $s(\cdot)$ es una función estrictamente creciente, con lo cual resulta ser una biyección, y su inversa es también de clase \mathcal{C}^1 (por el teorema de la función inversa) y estrictamente creciente. De esta forma podemos considerar la reparametrización dada por esta función inversa, la cual denotamos por $t: [0, L(\Gamma)] \rightarrow [a, b]$, y considerar la parametrización equivalente que resulta de tomar como parámetro la longitud de arco, vale decir

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s)), \quad s \in [0, L(\Gamma)]$$

Por el teorema de la función inversa, notemos que

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t(s)) \right\|} > 0.$$

En consecuencia, la reparametrización no solo preserva la orientación, sino que además recorre Γ a rapidez constante e igual a 1:

$$\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = 1.$$

Es posible verificar que cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización en longitud de arco, salvo orientación por supuesto, por lo cual ésta puede ser considerada como una parametrización canónica de la curva. La llamaremos *parametrización natural* o *en longitud de arco*

Ejemplo A.1.9. Encuentre la parametrización natural de la cicloide $\vec{r}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Respuesta:

$$\vec{\sigma}(s) = 2R \left(\arccos \left(1 - \frac{s}{4R} \right) - \left(1 - \frac{s}{4R} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{4R} \right)^2}, 1 - \left(1 - \frac{s}{4R} \right)^2 \right) \quad s \in [0, 8R].$$

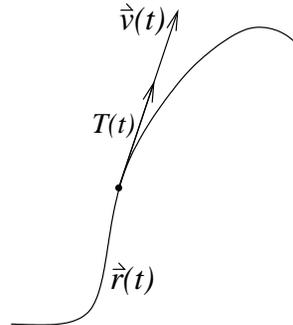
Ejercicio A.1.10. Encontrar la reparametrización en longitud de arco para la hélice $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, \frac{ht}{2\pi})$, $t \in [0, 4\pi]$.

A.1.3. Velocidad, rapidez y vector tangente

Definición A.1.11. Consideremos $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva simple Γ . Definimos el vector velocidad, la rapidez y el vector tangente, respectivamente, mediante

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t), \quad v(t) = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \frac{ds}{dt}(t), \quad T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\|, \quad (\text{A.3})$$

donde $s : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$ representa la función de longitud de arco.



Notemos que si $\vec{\sigma}$ es la parametrización natural entonces

$$T(s) = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) \quad (\text{A.4})$$

debido a que $\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) \right\| = 1$. Esto nos permite interpretar la parametrización natural como aquella que se obtiene al recorrer la curva Γ con velocidad constante unitaria, y además nos indica que el vector tangente sólo depende del punto en el cual es calculado y no de la parametrización regular \vec{r} asociada a la curva, salvo por la orientación. En efecto, si $\vec{r}_1(\tau) = \vec{r}(\theta(\tau))$ con θ una reparametrización, entonces

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\tau}(\tau) / \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\tau}(\tau) \right\| = \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta(\tau)) \frac{d\theta}{d\tau}(\tau) / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta(\tau)) \right\| \left| \frac{d\theta}{d\tau}(\tau) \right| = \text{signo} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) T(\theta(\tau)).$$

Enfaticemos que lo anterior nos permite calcular el vector tangente a Γ en el punto $P \in \Gamma$ de dos maneras distintas:

- (1) $T(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) / \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\|$ donde t es tal que $\vec{r}(t) = P$.
- (2) Calcular la parametrización en longitud de arco $\vec{\sigma}(s)$ y calcular

$$T(s) = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \quad \text{con } s \text{ tal que } \vec{\sigma}(s) = P.$$

En general, el procedimiento (1) es más directo y por lo tanto será el más utilizado.

A.2. Complementos sobre curvas

A.2.1. Integrales sobre curvas

Definición A.2.1. Sea Γ una curva simple y regular en \mathbb{R}^n , y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en $\Omega \supseteq \Gamma$. Definimos la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_{\Gamma} f d\ell := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt, \quad (\text{A.5})$$

donde $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ .

Es fácil verificar que el valor de la integral definida en (A.5) no depende de la parametrización regular elegida.

Una aplicación de la integral sobre curvas es el cálculo de la masa de un alambre parametrizado por $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. En efecto, si suponemos que la densidad lineal de masa [gr/cm] de este alambre está dada por la función continua $\rho(x, y, z)$, que depende de la posición dentro del alambre, entonces la masa total del alambre puede aproximarse por

$$M \simeq \sum_{i=0}^{N-1} \rho(\vec{r}(t_i)) \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|. \quad (\text{A.6})$$

Usando los mismos argumentos para definir la longitud de arco, podemos mostrar que cuando el *paso* de la malla $\Delta(\{t_i\})$ tiende a cero, la suma anterior tiende a la integral de línea $\int_{\Gamma} \rho d\ell$.

Ejemplo A.2.2. La densidad de masa de un alambre helicoidal parametrizado por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, viene dada por

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Luego, la masa total del alambre será

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3 \right). \end{aligned}$$

El centro de masa de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, cuya densidad lineal de masa es $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, se define como el punto de coordenadas:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \rho \, d\ell, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \rho \, d\ell, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} z \rho \, d\ell,$$

donde M es la masa total de la curva.

Ejemplo A.2.3. El centro de masa de la hélice del ejemplo A.2.2 está dado por

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos t (1+t^2) \sqrt{2} \, dt = \frac{1}{(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3)} \int_0^{2\pi} t^2 \cos t \, dt = \frac{6}{(3+4\pi^2)}, \\ y_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \sin t (1+t^2) \sqrt{2} \, dt = \frac{1}{(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3)} \int_0^{2\pi} t^2 \sin t \, dt = \frac{-6\pi}{(3+4\pi^2)}, \\ z_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} t (1+t^2) \sqrt{2} \, dt = \frac{1}{(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3)} (2\pi^2 + 4\pi^4) = \frac{3\pi(1+2\pi^2)}{(3+4\pi^2)}. \end{aligned}$$

A.2.2. Curvatura y vector normal

En primera aproximación, la trayectoria de una partícula que se mueve siguiendo la parametrización $\vec{r}(t)$, se aproxima a una recta cuya dirección viene dada (localmente) por el vector tangente $T(t)$. Cuando estudiamos las variaciones de la velocidad, esto es la aceleración de la partícula, vemos que esta se produce ya sea por el cambio en la magnitud de la velocidad, o bien cambios en la dirección de la velocidad. Así por ejemplo, en movimiento rectilíneo ($T(t)$ es constante) la única aceleración posible proviene de la variación de la rapidez y está dada por $\frac{d^2s}{dt^2}T(t)$. Por el contrario, en un movimiento a lo largo de una circunferencia de radio R a velocidad angular constante ω , la rapidez es constante e igual a ωR . Sin embargo, por efecto del cambio en la dirección de la velocidad aparece una aceleración centrípeta de magnitud $\frac{\omega^2}{R}$ y que apunta hacia el centro de la circunferencia.

En lo que sigue veremos que en un movimiento general $\vec{r}(t)$, la aceleración puede descomponerse en estos dos tipos de aceleraciones: una componente tangencial y una componente de tipo centrípeta. Para ello identificaremos la circunferencia que mejor aproxima (instantáneamente) la trayectoria. Supondremos que todas las parametrizaciones son al menos dos veces diferenciables.

Intuitivamente, la curvatura aparece por efecto de la variación del vector tangente, respecto de la longitud de arco. Mientras más rápida sea esta variación, más cerrada será la curva y menor el radio de la misma.

Definición A.2.4. Definimos la curvatura de la curva Γ mediante

$$\kappa(s) := \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| \tag{A.7}$$

Cuando $\kappa(s) > 0$ definimos el radio de curvatura y el vector normal, respectivamente como

$$R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}, \quad N(s) := \frac{dT}{ds}(s) \Big/ \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| \tag{A.8}$$

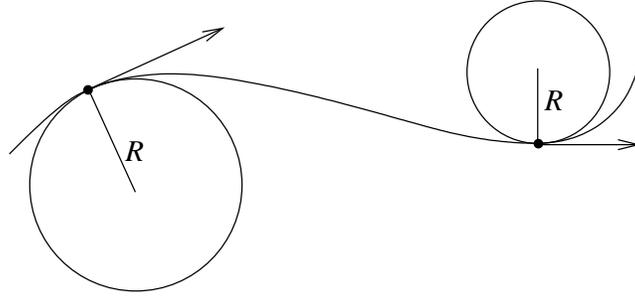


Figura A.4: vector tangente y curvatura.

Notemos que $N(s) \perp T(s)$. En efecto, esto se obtiene de derivar la identidad $\|T(s)\|^2 = 1$, de modo tal que

$$0 = \frac{d}{ds} \|T(s)\|^2 = 2T(s) \cdot \frac{dT}{ds}(s).$$

Debido a lo engorroso que puede llegar a ser el cálculo explícito de la parametrización en longitud de arco, vale la pena tener expresiones para la curvatura, radio de curvatura y vector normal que sean calculables directamente a partir de una parametrización regular cualquiera $\vec{r}(t)$. Eso es relativamente fácil utilizando la regla de la cadena pues se tiene

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dT}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt}.$$

En consecuencia

$$\kappa(t) = \left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| \Big/ \frac{ds}{dt}(t) \quad (\text{A.9})$$

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \quad (\text{A.10})$$

$$N(t) = \frac{dT}{dt} \Big/ \left\| \frac{dT}{dt} \right\| \quad (\text{A.11})$$

A.2.3. Vector binormal y torsión

En esta sección restringiremos nuestro estudio a $n = 3$.

Definición A.2.5. Definimos el vector binormal B mediante

$$B = T \times N,$$

donde la operación \times denota el producto cruz entre dos vectores de \mathbb{R}^3 .

Hemos visto que los vectores T y N son ortogonales entre sí, pero pueden variar a medida que nos movemos por la curva. En consecuencia el vector B variara también en general.

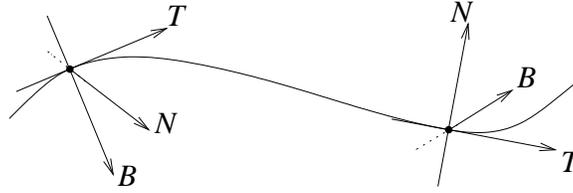


Figura A.5: vectores tangente, normal y binormal.

Notemos que

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = \kappa N \times N + T \times \frac{dN}{ds} = T \times \frac{dN}{ds},$$

obteniendo así que $\frac{dB}{ds}$ es ortogonal a T . De otra parte, sabemos que

$$B \cdot \frac{dB}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \|B\|^2 \right) = 0,$$

lo cual implica que $\frac{dB}{ds}$ es también ortogonal a B , concluyendo finalmente que $\frac{dB}{ds}$ es proporcional a N . Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición A.2.6. Definimos la torsión asociada a la curva como la siguiente magnitud

$$\tau(s) = -N(s) \cdot \frac{dB}{ds}(s).$$

La torsión se puede interpretar como la tasa a la cual el vector binormal “persigue” al vector normal. Notemos que no es necesario trabajar con la parametrización en longitud de arco ya que se tiene:

$$\tau(t) = -N(t) \cdot \left(\frac{dB}{dt}(t) / \frac{ds}{dt}(t) \right). \quad (\text{A.12})$$

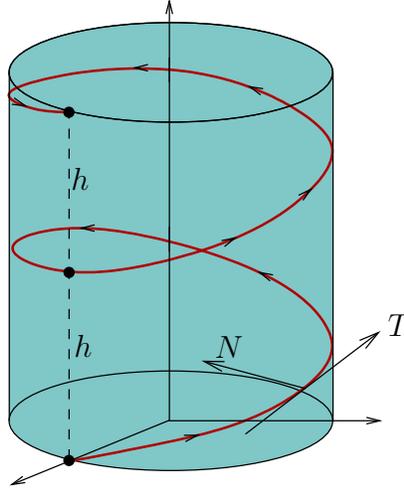
Ejemplo A.2.7. Consideremos la hélice $\vec{r}(t) = a\hat{\rho}(t) + \frac{ht}{2\pi}\hat{k}$

donde $\hat{\rho}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $\hat{\theta}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$ denotan los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas. Notemos que $\frac{d\hat{\rho}}{dt}(t) = \hat{\theta}(t)$ y $\frac{d\hat{\theta}}{dt}(t) = -\hat{\rho}(t)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} T(t) &= (a\hat{\theta}(t) + h\hat{k})/\sqrt{a^2 + h^2}, & N(t) &= -\hat{\rho}(t), \\ B(t) &= (a\hat{k} - h\hat{\theta}(t))/\sqrt{a^2 + h^2}, & \frac{dB}{dt}(t) &= \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \hat{\rho}(t), \\ \tau(t) &= h/(a^2 + h^2), & k(t) &= a/(a^2 + h^2). \end{aligned}$$

A.2.4. Fórmulas de Frenet

Considerando las definiciones dadas en esta sección, las siguientes relaciones se satisfacen:



$$(I) \quad \frac{dT}{ds} = \kappa N,$$

$$(II) \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B,$$

$$(III) \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N,$$

donde todas las funciones implicadas están evaluadas en s , el camino recorrido.

Las relaciones (I) y (III) son consecuencias directas de las definiciones establecidas. Probemos la relación (II): dado que $N = B \times T$ se obtiene

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} \times T + B \times \frac{dT}{ds} = -\tau N \times T + B \times (\kappa N) = \tau B - \kappa T.$$

Notemos que en la segunda igualdad se utilizaron las relaciones (I) y (III).

Veamos ciertas aplicaciones de las fórmulas de Frenet.

Proposición A.2.8. *Las siguientes propiedades son ciertas:*

1. *Una curva con curvatura nula es una recta.*
2. *Una curva sin torsión es una curva plana.*

Demostración. 1) Si $\kappa = 0$, de la fórmula de Frenet (I) se tiene que $\frac{dT}{ds} = 0$, es decir, que $T(s) = T_0$ constante para todo s . De esta manera se concluye que

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(0) + \int_0^s T_0 ds = \vec{r}(0) + sT_0.$$

2) Si $\tau = 0$, de la fórmula de Frenet (III) se tiene que $\frac{dB}{ds} = 0$, es decir, que $B(s) = B_0$ constante para todo s . Entonces

$$\frac{d}{ds}(B_0 \cdot \vec{r}) = B_0 \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = B_0 \cdot T = 0,$$

y luego $B \cdot \vec{r}$ es siempre constante (e igual a $B_0 \cdot \vec{r}(0)$), esto quiere decir que la curva pertenece al plano ortogonal a B_0 y que pasa por $\vec{r}(0)$, el cual esta dado por

$$B_0 \cdot (\vec{r}(s) - \vec{r}(0)) = 0.$$

■

A.2.5. Planos de Frenet

Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva regular y consideremos $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco que supondremos dos veces diferenciable. Consideremos $T(s)$ y $N(s)$ los vectores tangente y normal (unitarios) a \vec{r} en el punto s . Los vectores $T(s)$ y $N(s)$ determinan un plano, llamado *plano osculador* de \vec{r} en el punto s . Por definición el vector binormal $B(s)$ es unitario (en efecto si u y v son vectores entonces $\|u \times v\| = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$) y es ortogonal al plano osculador por lo tanto un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ pertenecerá a este plano si satisface la ecuación:

$$(\vec{x} - \vec{r}(s)) \cdot B(s) = 0. \quad (\text{A.13})$$

El plano definido por los vectores $N(s)$ y $B(s)$ se llama *plano normal* de \vec{r} en s y por lo tanto tiene por vector normal a $T(s)$. La ecuación del plano normal esta dada por:

$$(\vec{x} - \vec{r}(s)) \cdot T(s) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Se llama *plano rectificante* de \vec{r} en s al plano que pasa por $\vec{r}(s)$ y que es ortogonal al plano osculador y al plano normal y por lo tanto tiene como vector normal a $N(s)$. Su ecuación viene dada por:

$$(\vec{x} - \vec{r}(s)) \cdot N(s) = 0. \quad (\text{A.15})$$

A las rectas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen vectores paralelos $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ se les llama, respectivamente, recta tangente, recta normal y recta binormal de \vec{r} en s . Es claro que las ecuaciones paramétricas de estas rectas corresponden respectivamente a

$$\vec{x} = \vec{r}(s) + tT(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{x} = \vec{r}(s) + tN(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{x} = \vec{r}(s) + tB(s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.18})$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

A.3. Ejercicios

1. Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente : el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(A, 0)$ y $(-A, 0)$ es constante e igual a $B > 0$. (Lemniscata)

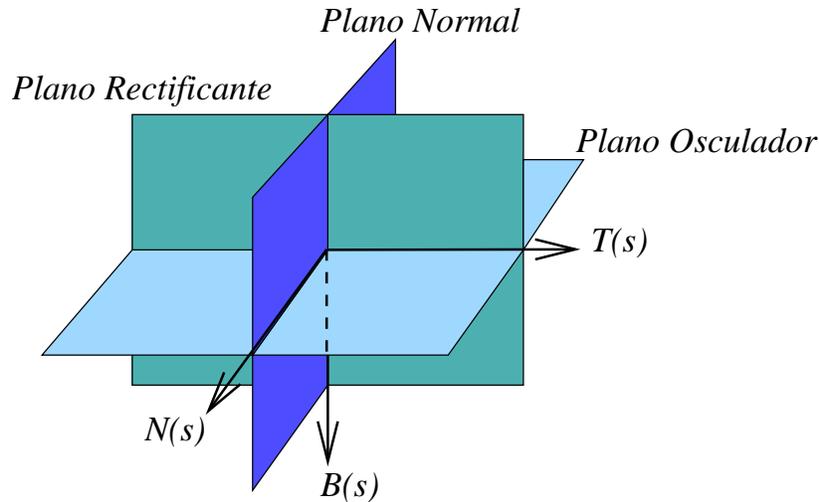


Figura A.6: planos osculador, normal y rectificante.

- Sea Γ la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio R_0 , la cual rueda sin resbalar sobre otra circunferencia de radio mayor $R > R_0$. Parametrice la curva resultante y determine la función de longitud de arco. Estudie la curvatura y la torsión donde tenga sentido.

- Parametrizar la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Indicación: Note que el vector $(1, 1, 1)$ es normal al plano que contiene a la circunferencia.

- Calcular la masa del alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$ y cuya densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2$.

- Dada una función continua y no nula $g : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana Γ de longitud l_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$.

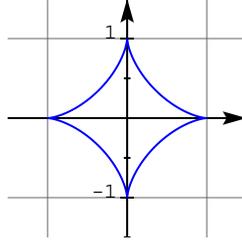
Ind.: Defina $\theta(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau$, $x(s) = \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau$, $y(s) = \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau$ y estudie $\vec{r}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$.

- Sea Γ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Determine una fórmula para la longitud de Γ . Suponiendo que f es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

A.4. Problemas

Problema A.1. Considere la parametrización $\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, 0)$. La curva $\vec{r}([0, 2\pi])$ recibe el nombre de asteroide.



- (a) Calcule el vector tangente, normal y binormal, la curvatura y la torsión a la curva en los puntos donde tenga sentido. Justifique brevemente en cuales puntos estas nociones están bien definidas.
- (b) Calcule además la parametrización en longitud de arco y el largo total de la curva.

Problema A.2. ¹ Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

$$z(0) = 1 \quad , \quad \frac{dz}{d\theta}(0) = 0,$$

donde (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas.

- (a) Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la partícula (use a θ como parámetro).
- (b) Calcule la longitud de arco para $\theta \in [0, 2\pi]$.
- (c) Calcule el vector tangente, el normal y el binormal asociado a γ , así como su curvatura y su torsión.

Problema A.3. ² Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad : existe un punto \vec{P}_0 por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en longitud de arco.

- (a) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, \ell(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.

¹Control 1. Primavera 1997. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

²Control 1. Primavera 1997. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

(b) Demuestre que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 1 - k(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0, \end{aligned}$$

donde $k(s), \tau(s)$ son la curvatura y la torsión de Γ , respectivamente.

(c) Concluya que Γ es una curva plana.

(d) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

Problema A.4.³ Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

(solo tomar en cuenta la parte de la curva con $z \geq 0$).

(a) Encuentre una parametrización de Γ (sugerencia: use coordenadas cilíndricas).

(b) Calcule el centro de masa suponiendo densidad de masa $\rho(x, y, z) = xy$. Puede usar argumentos de simetría.

Problema A.5.⁴ Considere la curva Γ parametrizada (en coordenadas cilíndricas) por

$$\vec{r}(\theta) = e^{|\theta|}\hat{\rho} + 2\hat{k}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

(a) Bosqueje la curva.

(b) Calcule la curvatura y la torsión (distinga los casos $\theta > 0$ y $\theta < 0$. ¿Qué ocurre en $\theta = 0$?).

(c) Calcule el centro de masa de Γ suponiendo una densidad constante ρ_0 .

Problema A.6.⁵ Sea Γ una curva simple regular y $\vec{r}_0 : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco. Suponga que $k(s) \neq 0$ y considere la curva definida por los centros de curvatura, llamada *evoluta* de Γ , cuya parametrización viene dada por

$$\vec{c}(s) = \vec{r}_0(s) + 1/k(s)\hat{N}(s)$$

(a) Demuestre que las rectas tangentes a ambas curvas (en $\vec{r}_0(s)$ y $\vec{c}(s)$ respectivamente) son perpendiculares.

³Control 1. Primavera 1997. Matemáticas Aplicadas. Prof: Roberto Cominetti

⁴Control 1. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas.

⁵Control 1. Primavera 2000. Matemáticas Aplicadas.

- (b) Pruebe que si la curva Γ es plana, entonces la recta tangente a la evoluta en el punto $\vec{c}(s)$ intersecta a la curva Γ en el punto $\vec{r}_0(s)$.
- (c) Probar que la evoluta de una hélice es una hélice. Para ello basta verificar que la curvatura y la torsión son constantes.

Problema A.7.⁶ Sean $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ los vectores tangente, normal y binormal a una curva regular \mathcal{C} . Se define el vector de Darboux como $\vec{w} = \tau\hat{t} + k\hat{b}$ donde k y τ representan la curvatura y torsión de la curva. Probar que cada uno de los vectores $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ satisface la ecuación

$$\frac{d\hat{u}}{ds} = \vec{w} \times \hat{u}.$$

Problema A.8.⁷ Sea $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Denotemos por $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente. Sea $\kappa(t)$ la curvatura y $\tau(t)$ la torsión. Suponga que $\kappa(t) \neq 0$ y $\tau(t) \neq 0$ para todo t . Se dice que Γ es una *curva de Bertrand* si existe otra curva regular, llamada *par de Bertrand de Γ* , parametrizada según t y tal que para cada valor de t las rectas normales a ambas curvas son iguales.

- (a) Pruebe que si Γ es una curva de Bertrand entonces existe una función $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la parametrización de su par de Bertrand satisface $\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \alpha(t)N(t)$. Más aún, muestre que necesariamente α es constante, i.e. $\alpha(t) \equiv \alpha_0$ para algún $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.
- (c) Pruebe que si existen dos constantes no nulas A y B tales que $A\kappa(t) + B\tau(t) = 1$ para todo t , entonces Γ es una curva de Bertrand. Indicación: considere $\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + AN(t)$.
- (c) Usando (ii), verifique que dados $a > 0$ y $b > 0$ la hélice $\vec{\sigma}(t) = (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), bt)$, $t \in [0, 1]$, es una curva de Bertrand y caracterice sus pares de Bertrand.

Problema A.9.⁸ Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por $\vec{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = \sin t \hat{i} + [\cos t + \ln \tan(t/2)] \hat{j}$.

- (a) Calcule $\dot{\vec{r}}(t)$ y muestre que $\vec{r}(t)$ es regular salvo en $t = \pi/2$.
- (a) Dado $t_0 \in [0, \pi/2[$, encuentre la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $\vec{r}(t_0)$. Sea $P_0 = (0, y_0)$ el punto de intersección de esta recta tangente con el eje OY . Pruebe que la longitud del segmento de la tangente entre $\vec{r}(t_0)$ y P_0 es igual a 1.

Problema A.10.⁹ Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$, $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa'(s) \neq 0$, donde $\tau(s)$ es la torsión y $\kappa'(s)$ es la derivada con respecto a s de la curvatura $\kappa(s)$ en el punto $\vec{\sigma}(s)$.

⁶Control 1. Primavera 2001. Matemáticas Aplicadas.

⁷Control 1. Primavera 2002. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁸Control 1. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

⁹Control 1. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

- (a) Pruebe que si Γ pertenece a una esfera (i.e. existen $a > 0$ y $\vec{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\vec{\sigma}(s) - \vec{p}_0\| = a$) entonces

$$R(s)^2 + (R'(s)/\tau(s))^2 \equiv \text{constante}, \quad (\text{A.19})$$

donde $R(s)$ es el radio de curvatura en el punto $\vec{\sigma}(s)$.

- (b) Demuestre la recíproca: si $\vec{\sigma}(s)$ satisface (A.19) entonces Γ pertenece a una esfera. Ind.: pruebe que si se tiene (A.19) entonces la función $\vec{p}(s) := \vec{\sigma}(s) + R(s)N(s) + R'(s)/\tau(s)B(s)$ es constante (con $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente).

Problema A.11. ¹⁰

1. Dados $a, b, c > 0$ tales que $c^2 = a^2 + b^2$, sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $\vec{r} : [0, 2\pi c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\vec{r}(s) = a \cos\left(\frac{s}{c}\right)\hat{i} + a \sin\left(\frac{s}{c}\right)\hat{j} + b\left(\frac{s}{c}\right)\hat{k}.$$

- (a) Muestre que el parámetro s es la longitud de arco sobre \mathcal{C} . Calcule el triedro de Frenet: vectores tangente, normal y binormal a la curva. Pruebe que las rectas tangentes a \mathcal{C} forman un ángulo constante con el vector unitario \hat{k} .
- (b) Pruebe que las rectas normales principales (i.e. aquellas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen como dirección al vector normal $N(s)$) cortan el eje z en un ángulo constante igual a $\pi/2$. Calcule la curvatura $\kappa = \kappa(s)$ y la torsión $\tau = \tau(s)$ de \mathcal{C} , y verifique que $\kappa/\tau = a/b$.

Indicación: Puede utilizar la siguiente fórmula válida para la parametrización en longitud de arco: $\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2} [\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)] \cdot \vec{r}'''(s)$.

2. Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$, $\kappa(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$. Diremos que Γ es una *hélice* si existe una dirección fija \hat{d}_0 tal que todas las rectas tangentes a Γ forman un ángulo constante con \hat{d}_0 . De esta forma, la curva \mathcal{C} de la parte (1) es un caso particular de una hélice con $\hat{d}_0 = \hat{k}$.

- (a) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si las rectas normales principales son paralelas a un plano fijo.
- (b) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si $\kappa/\tau \equiv cte$.

Problema A.12. ¹¹

Sea $\vec{\sigma} : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización en *longitud de arco* de una curva simple y regular Γ . En lo que sigue T, N, B denotan el triedro de Frenet y κ, τ la curvatura y la torsión respectivamente. Sea $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria y suponga que $\vec{\sigma}$ verifica:

$$\forall s \in [0, L(\Gamma)], \vec{\sigma}(s) \in S \text{ y } N(s) \text{ coincide con el vector } \textit{normal interior} \text{ de } S \quad (\text{A.20})$$

¹⁰Control 1. Primavera 2006. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

¹¹Control 1. Primavera 2007. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

- (a) Muestre que $N(s) = -\vec{\sigma}(s)$ para todo $s \in [0, L(\Gamma)]$, y utilizando las fórmulas de Frenet pruebe que $\kappa = 1$ y $\tau = 0$. Deducir que Γ es una curva plana.
- (b) Suponiendo adicionalmente que $\vec{\sigma}(0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{\sigma}'(0) = (0, 0, 1)$ dar una fórmula explícita para $\vec{\sigma}(s)$.
- (c) ¿Qué sucede si en (A.20) se reemplaza “normal interior” por *normal exterior*?

A.5. Resolución de Problemas

Solución Problema A.1

El vector tangente viene dado por:

$$T(\theta) = \begin{cases} (-\cos \theta, \sin \theta, 0) & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ (\cos \theta, -\sin \theta, 0) & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \vee \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Notemos que este vector no está definido en $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(0+h) - \vec{r}(0)}{h} &= (-1, 0, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\vec{r}(2\pi+h) - \vec{r}(2\pi)}{h} &= (1, 0, 0), \end{aligned}$$

entonces \vec{r} no es diferenciable en 0 y 2π . Además,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\frac{\pi}{2}+h) - \vec{r}(\frac{\pi}{2})}{h} &= (0, 1, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\vec{r}(\frac{\pi}{2}+h) - \vec{r}(\frac{\pi}{2})}{h} &= (0, -1, 0), \end{aligned}$$

lo cual implica que \vec{r} no es diferenciable en $\frac{\pi}{2}$. Así también

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\pi+h) - \vec{r}(\pi)}{h} &= (1, 0, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\vec{r}(\pi+h) - \vec{r}(\pi)}{h} &= (-1, 0, 0) \end{aligned}$$

implica que \vec{r} no es diferenciable en π . Finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\frac{3\pi}{2}+h) - \vec{r}(\frac{3\pi}{2})}{h} &= (0, -1, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\vec{r}(\frac{3\pi}{2}+h) - \vec{r}(\frac{3\pi}{2})}{h} &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

implica que \vec{r} no es diferenciable en $\frac{3\pi}{2}$.

El vector normal está dado por:

$$N(\theta) = \begin{cases} (\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0) & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ (-\operatorname{sen} \theta, -\cos \theta, 0) & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \vee \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

El vector binormal es determinado como sigue:

Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$,

$$B(\theta) = T \times N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1).$$

Y para $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \vee \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$:

$$B(\theta) = T \times N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & -\cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1).$$

La curvatura de esta figura viene dada por:

Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \vee \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$:

$$k(\theta) = \left\| \frac{dT}{d\theta} \right\| / \left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right\| = 1.$$

La torsión se calcula para $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ como:

$$k(\theta) = \frac{\frac{dB}{d\theta} \cdot N(\theta)}{\left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right\|} = 0 \cdot N(\theta) = 0.$$

Finalmente, la parametrización en longitud de arco es la siguiente

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right\| d\theta = \frac{3}{2} \int_0^t \operatorname{sen} 2\theta d\theta = \frac{3}{4} (1 - \cos(2t)),$$

lo cual implica que $t(s) = \frac{1}{2} \arccos(1 - \frac{4s}{3})$. Obteniendo

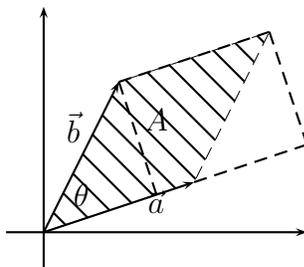
$$\vec{r}(t(s)) = (\cos^3(\frac{1}{2} \arccos(1 - \frac{4s}{3})), \operatorname{sen}^3(\frac{1}{2} \arccos(1 - \frac{4s}{3})), 0).$$

Por lo tanto, el largo de la curva es $l(\Gamma) = 6$.

Apéndice B

Area e integral de superficie

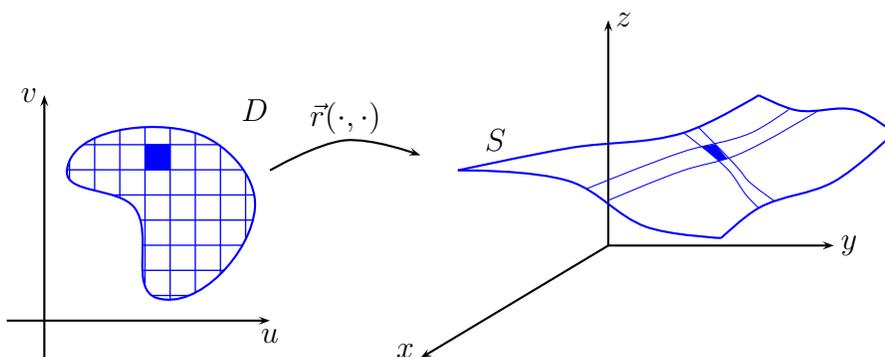
El área de un paralelogramo definido por los vectores \vec{a} y \vec{b} está dada por $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, lo cual se desprende de la siguiente figura:



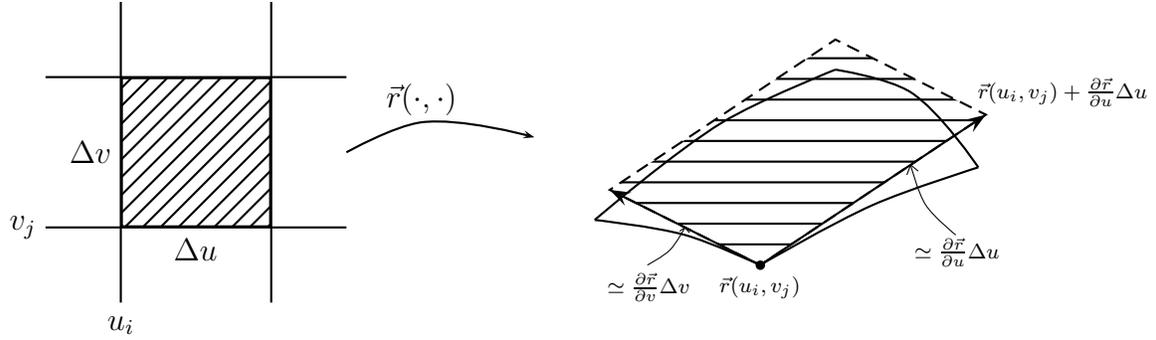
En resumen

$$A = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin \theta| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \quad (\text{B.1})$$

Luego, para aproximar el área de una superficie procedemos a subdividir en pequeñas celdas como se indica en la siguiente figura:



Ampliamos la región ennegrecida:



De esta manera, podemos estimar el area $(\Delta A)_{ij}$ de la región ennegrecida como sigue

$$(\Delta A)_{ij} \simeq \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Sumando se tiene

$$A(S) = \sum_{i,j} (\Delta A)_{ij} \simeq \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Pasando al límite, se demuestra que la suma converge a la integral doble

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv,$$

lo cual motiva las siguientes definiciones.

Definición B.0.1. Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Definimos el área de S mediante:

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

Definición B.0.2. Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Si $\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar continua definida en un abierto Ω que contiene a S , definimos la integral de superficie de ρ sobre S mediante:

$$\iint_S \rho dA = \iint_D \rho(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

Notemos que los conceptos antes definidos no dependen de la parametrización regular elegida, es decir, si $\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \theta$ es una reparametrización de la superficie S , donde $\theta : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D$ es un difeomorfismo (θ y θ^{-1} de clase \mathcal{C}^1), entonces

$$\iint_{D_1} \rho(\vec{r}_1(s, t)) \left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t}(s, t) \right\| dsdt = \iint_D \rho(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv,$$

con lo cual la integral $\iint_D \rho dA$ no cambia bajo reparametrización. La demostración es una simple aplicación del teorema de cambio de variables para integrales dobles. En efecto, sabemos de la regla de la cadena que las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \theta_u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial \theta_v}{\partial s}; \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \theta_u}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial \theta_v}{\partial t}.$$

Por lo que se tiene

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \left(\frac{\partial \theta_u}{\partial s} \frac{\partial \theta_v}{\partial t} - \frac{\partial \theta_v}{\partial s} \frac{\partial \theta_u}{\partial t} \right).$$

Finalmente, aplicando el teorema de cambio de variables se deduce

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \rho(\vec{r}_1(s, t)) \left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} \right\| ds dt &= \iint_{D_1} \rho(\vec{r}(\theta(s, t))) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \underbrace{\left| \frac{\partial \theta_u}{\partial s} \frac{\partial \theta_v}{\partial t} - \frac{\partial \theta_v}{\partial s} \frac{\partial \theta_u}{\partial t} \right|}_{|\det J_\theta|} ds dt, \\ &= \iint_D \rho(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv. \end{aligned}$$

Observación B.0.3. *Es importante que la parametrización $\vec{r}(\cdot)$ usada para calcular $\iint_S \rho dA$ sea simple y regular con el fin de evitar el sumar dos veces la misma región. El análogo en curvas es que la parametrización no debe devolverse y pasar dos veces por el mismo segmento de la curva.*

Notemos que si ρ representa densidad superficial de masa o carga eléctrica, la integral $\iint_S \rho dA$ representa la masa total o la carga eléctrica total contenida en la superficie S , respectivamente. La noción de centro de masa se extiende entonces naturalmente al caso de superficies de la siguiente manera:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_S x \rho dA; \quad y_G = \frac{1}{M} \iint_S y \rho dA; \quad z_G = \frac{1}{M} \iint_S z \rho dA, \quad (\text{B.2})$$

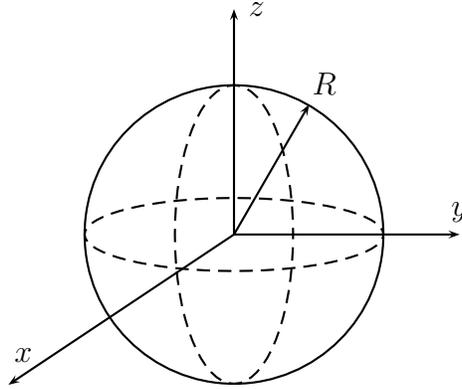
donde $M = \iint_S \rho dA$ y $dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv$. Podemos resumir lo anterior con la siguiente notación vectorial

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \iint_S \vec{r} \rho dA, \quad \text{con } \vec{r} = (x, y, z). \quad (\text{B.3})$$

En otras palabras, intuitivamente se tiene que el diferencial de masa está dado por $dm = \rho dA$.

Observación B.0.4. *Las definiciones establecidas en esta sección pueden extenderse trivialmente al caso de una superficie S regular por trozos.*

Ejemplo B.0.5. Calculemos el área la superficie de una esfera



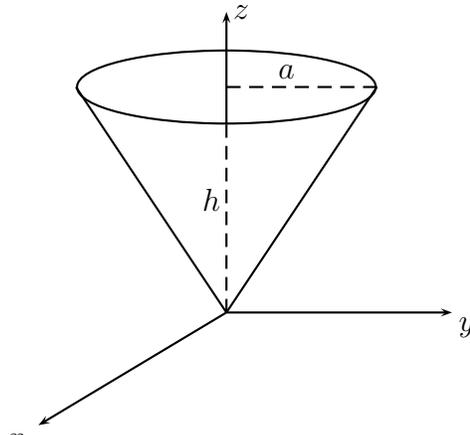
cuya parametrización sabemos que esta dada por

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = R(\cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$

Aplicando las fórmulas definidas en esta sección se obtiene

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\| R \operatorname{sen} \varphi \hat{\theta} \times R \hat{\varphi} \right\| d\theta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 |\operatorname{sen} \varphi| d\theta d\varphi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Ejemplo B.0.6. El area de la superficie del cono, que se ve en la siguiente figura



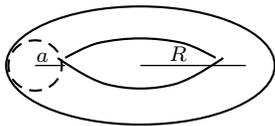
y cuya parametrización es

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \left(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, \frac{\rho h}{a} \right), \quad \rho \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi),$$

viene dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| d\theta d\rho = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| \left(\hat{\rho} + \frac{h}{a} \hat{k} \right) \times \rho \hat{\theta} \right\| d\theta d\rho \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho \left\| \hat{k} - \frac{h}{a} \hat{\rho} \right\| d\theta d\rho = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2} \cdot 2\pi \int_0^a \rho d\rho = \pi a \sqrt{a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo B.0.7. Calculemos finalmente el área de la superficie de un Toro de radios (R, a) , donde $a < R$.



Recordemos que la parametrización del Toro viene dada por

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = ((R + a \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta, (R + a \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, 2\pi).$$

Luego, el área queda determinada como sigue

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| (R + a \operatorname{sen} \varphi) \hat{\theta} \times a \hat{\varphi} \right\| d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a |R + a \operatorname{sen} \varphi| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(R + a \operatorname{sen} \varphi) d\varphi d\theta = 4\pi^2 a R. \end{aligned}$$

Ejemplo B.0.8. Calculemos el área del Helicoide

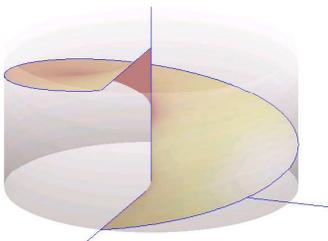


Figura B.1: helicoide de radio 1 y altura 1

Para esto parametrizamos en cilíndricas $\vec{r}(\rho, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \frac{h\theta}{2\pi})$. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| d\theta dr = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| \hat{r} \times \left(r \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi} \hat{k} \right) \right\| d\theta dr \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| r \hat{k} - \frac{h}{2\pi} \hat{\theta} \right\| d\theta dr = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} d\theta dr \\ &= h \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{h} \right)^2} dr = \frac{h^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi a}{h}} \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{h^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[u \sqrt{1 + u^2} + \ln \left(u + \sqrt{u^2 + 1} \right) \right] \Big|_0^{\frac{2\pi a}{h}} \\ &= \frac{h^2}{4\pi} \left[\frac{2\pi a}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi a}{h} \right)^2} + \ln \left(\frac{2\pi a}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi a}{h} \right)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por ejemplo, para $a = 1$ y $h = 2\pi$ se tiene que

$$A(S) = \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

Finalmente, la masa del helicoide anterior cuando la densidad es $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, y $h = 2\pi$ viene dada por

$$m = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \cdot \sqrt{1+r^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^a (1+r^2) dr = 2\pi \left(a + \frac{a^3}{3} \right).$$

B.1. Ejercicios

1. Calcule el área de la intersección entre $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$ donde a es una constante.
2. Considere el paraboloides de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ con $R > 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$. Calcule el área de la superficie definida por la porción del cilindro que queda fuera del paraboloides.
3. Calcular la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$, la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a un punto fijo (x_0, y_0, z_0) .
4. Sea S el grafo de la función $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Calcular el vector normal y probar que:

$$A(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

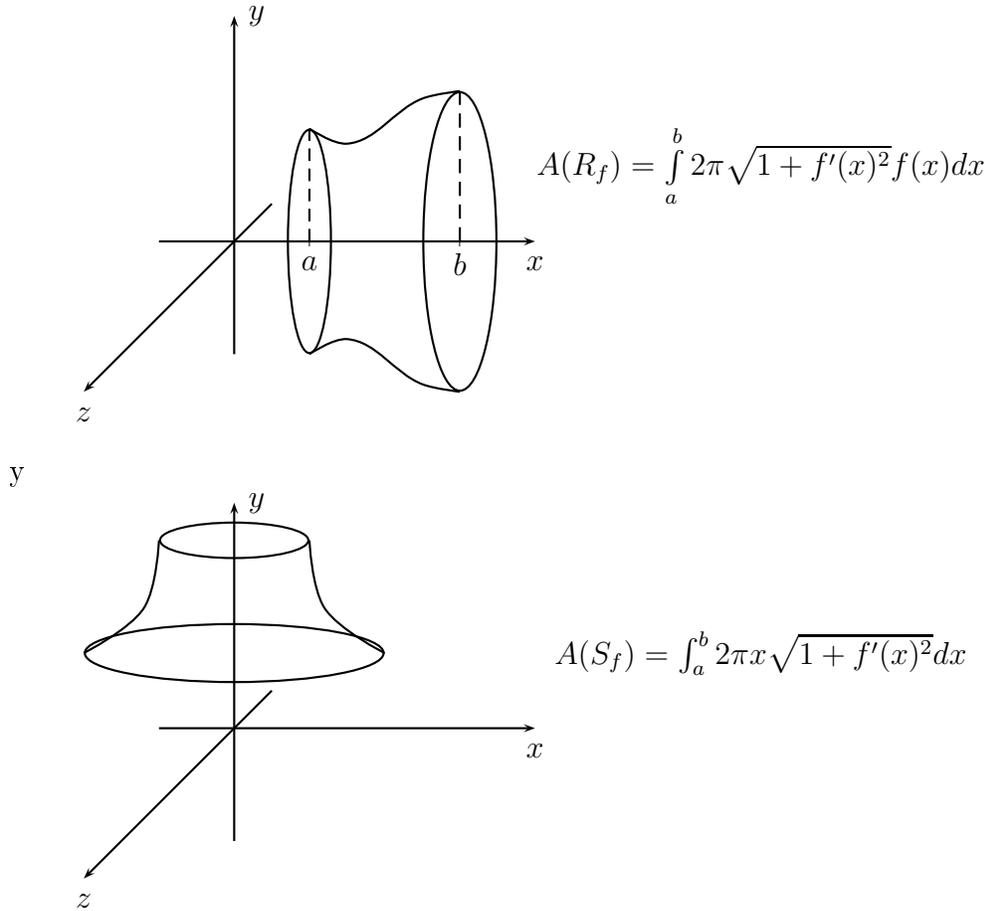
5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f'(v) \neq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Considere la superficie parametrizada por $\vec{r}(u, v) = u\hat{i} + f(v)\hat{j} + f(v)^2\hat{k}$. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\vec{r}(u_0, v_0)$. Pruebe que este plano contiene al eje OX si y sólo si $f(v_0) = 0$.
6. Determine la masa total del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, suponiendo densidad superficial de masa $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.
7. Considere la porción Σ de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = R^2$ que se encuentra entre los planos $z = 0$ y $z = R - x$. Bosqueje Σ y calcule el centro de masa de Σ suponiendo densidad superficial de masa constante igual a ρ_0 .
8. Calcule el centro de masa de la superficie definida por $z = x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, con densidad superficial de masa $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.
9. Determine el área de la superficie parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u^2, uv, v^2/2)$ donde $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 3$.

B.2. Problemas

Problema B.1. (*Trompeta de Torricelli*) Se define la Trompeta de Torricelli como la revolución en torno al eje OX de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, considerando $x \in [1, \infty)$ (Resultando algo así como las trompetas que llevan los hinchas al estadio).

- (i) Parametrice esta superficie.
- (ii) Calcule el área de la Trompeta.
- (iii) Calcule el volumen. ¿Qué puede decir sobre los dos valores calculados?

Problema B.2. Demuestre que las fórmulas



usadas para las áreas de revolución de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en torno al eje x e y respectivamente, son consistentes con la definición de área considerada aquí.

Problema B.3. Calcule el área de la intersección entre $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

Problema B.4. ¹ Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie caracterizada por $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

¹Control 1. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

- (a) Encuentre una parametrización regular de S y obtenga un campo de normales a S . Bosqueje S en un gráfico.
- (b) Calcule la masa y determine el centro de masa de S , asumiendo una densidad superficial de masa dada por $f(x, y, z) = 1/\sqrt{1+2z}$.

Problema B.5. ² Al calcular el área de una superficie curva normalmente aparecen números irracionales, como π . El siguiente ejemplo muestra que no siempre ésto es así.

- (a) Determinar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ incluida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (explote la simetría y use coordenadas cilíndricas).
- (b) Deduzca que el valor del área de la semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $y \geq 0$ que no está incluida dentro del cilindro es un cuadrado perfecto.

Problema B.6. ³ Sea \mathcal{C} una curva simple regular y $\vec{r}_0 : [0, L(\mathcal{C})] \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco. Considere la superficie Σ parametrizada por

$$\begin{aligned} \vec{r} &: [0, L(\mathcal{C})] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, \theta) &\mapsto \vec{r}(s, \theta) := \vec{r}_0(s) + a \cos(\theta) \hat{N}(s) + a \sin(\theta) \hat{B}(s) \end{aligned}$$

donde $\hat{N}(s)$ y $\hat{B}(s)$ representan los vectores normal y binormal a la curva \mathcal{C} en el punto $\vec{r}_0(s)$, y $a \geq 0$ es una constante tal que $a \leq 1/k(s)$ para todo $s \in [0, L(\mathcal{C})]$.

- (a) Bosqueje la superficie Σ .
- (b) Calcule la normal $\hat{n} = \hat{n}(s, \theta)$ a la superficie.
- (c) Demuestre que el área de Σ es $A(\Sigma) = 2\pi a L(\mathcal{C})$.

Problema B.7. ⁴ Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Determine el centro de masa de S suponiendo que la densidad de masa es constante e igual a σ_0 [kg/m²].
- (b) El momento de inercia de una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ respecto de una recta L se define como

$$I = \iint_{\Sigma} d_L(x, y, z)^2 \sigma(x, y, z) dA$$

²Control 1. Primavera 1999. Matemáticas Aplicadas. Prof: Felipe Álvarez

³Control 1. Primavera 2000. Matemáticas Aplicadas.

⁴Control 1. Primavera 2000. Matemáticas Aplicadas.

donde $\sigma(\cdot)$ es la densidad superficial de masa y $d_L(x, y, z)$ es la distancia del punto $(x, y, z) \in \Sigma$ a la recta L . Determine el momento de inercia I_z para la superficie S de la parte (a) respecto del eje z . ¿Qué puede decir de I_x e I_y ?

Problema B.8. ⁵ Considere el paraboloides $P \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = 1 + \rho^2$, $\rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$ (en coordenadas cilíndricas).

- Bosqueje la superficie P
- Considere la sección S de P que queda dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. Encuentre una parametrización para S indicando su dominio de definición.
- Calcule el vector normal unitario a S y el elemento de superficie.
- Calcule la masa de S suponiendo densidad superficial de masa $f(\rho, \theta, z) = 1/\sqrt{1 + 4\rho^2}$.

Problema B.9. ⁶ Considere el casquete elipsoidal S dado por $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ ($a, b, c > 0$).

- Pruebe que el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está dado por $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$.
- Pruebe que la recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y que es perpendicular al plano de la parte (a.1) está dada por $\frac{xa^2}{x_0} = \frac{yb^2}{y_0} = \frac{zc^2}{z_0}$.
- Verifique que las proyecciones ortogonales del origen sobre los planos tangentes a S satisfacen la ecuación $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

B.3. Resolución de Problemas

Solución Problema B.2

Para el eje x : Si “intercambiamos” mentalmente el eje x con el eje z y utilizamos coordenadas cilíndricas, podemos escribir la superficie de revolución de f en torno a x (ahora z) como:

$$\vec{S}(z, \theta) = f(z)\hat{\rho} + z\hat{k}, \quad (z, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

Recordamos la definición de área

$$A(S) = \iint_S \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\| dudv.$$

⁵Control 1. Primavera 2001. Matemáticas Aplicadas.

⁶Control 1. Primavera 2003. Matemáticas Aplicadas. Profesor: Felipe Álvarez

Así, calculamos lo siguiente:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} = f(z)\hat{\theta}, \quad \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} = f'(z)\hat{\rho} + \hat{k}.$$

Luego

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} = f'(z)f(z)\hat{\theta} \times \hat{\rho} + f(z)\hat{\theta} \times \hat{k} = f(z)[f'(z)\hat{k} + \hat{\rho}].$$

Concluyendo que

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} \right\| \partial \theta \partial z = \int_a^b 2\pi f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} dz$$

y como consideramos intercambiamos los roles de x con z , recuperamos la fórmula deseada.

Para el eje y : Ahora intercambiamos y con z , de este modo, la parametrización es:

$$\vec{S}(x, \theta) = x\hat{\rho} + f(x)\hat{k}, \quad (x, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi].$$

Igual que antes:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} = \hat{\rho} + f'(x)\hat{k} \quad \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} = x\hat{\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} = x\hat{k} + xf'(x)(-\hat{\rho}),$$

cuya norma es igual a $|x|\sqrt{1 + f'(x)^2}$, concluyendo que

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} x \sqrt{1 + f'(x)^2} \partial \theta \partial x = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Solución Problema B.3

Manipulando apropiadamente las ecuaciones que definen la superficie a estudiar, se obtiene

$$x^2 + y^2 - x^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y + z)(y - z) = 0 \Rightarrow y = \pm z,$$

de este modo la parametrización de la superficie está dada por

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = a\hat{\rho} + z\hat{k}, \quad (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [-a \cos(\theta), a \cos(\theta)].$$

Observamos que el rango al que pertenece z esta limitado por y , que vale $a \cos(\theta)$, y como la superficie es simétrica, podemos considerar $z > 0$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, para después multiplicar el resultado obtenido por 8 (número de caras de la superficie). Así, dado que $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = a\hat{\theta}$ y $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = \hat{k}$, se obtiene

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = a\hat{\rho}$$

cuya norma es igual a a . Por lo tanto,

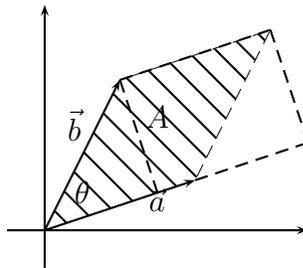
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos(\theta)} a \delta z \delta \theta = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos(\theta) \delta \theta = a^2 \text{sen}(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2$$

Deducimos entonces que el valor del área requerida es $8a^2$.

Apéndice C

Diferencial de volumen

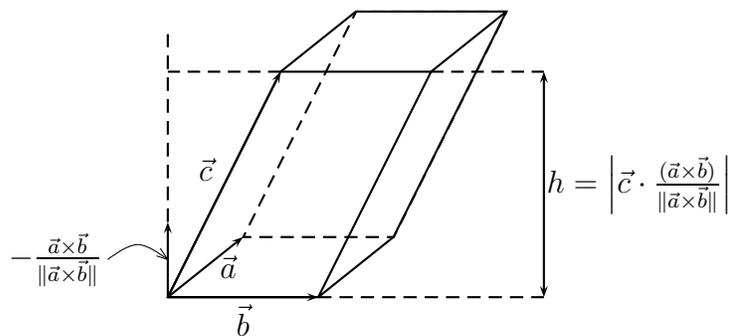
El objetivo de esta sección es describir el diferencial de volumen para un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal arbitrario. Para esto, consideremos el paralelogramo definido por dos vectores \vec{a} y \vec{b}



Es fácil ver que el área A de este paralelogramo viene dada por

$$A = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \text{sen } \theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

En el caso de un paralelepípedo definido por tres vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} tal como lo muestra la siguiente figura



el volumen V viene dado por

$$V = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \left| \vec{c} \cdot \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \right| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|.$$

Notemos que $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región más complicada, sabemos que

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz,$$

siempre que la integral exista. Decimos entonces que el elemento de volumen en cartesianas viene dado por $dV = dx dy dz$.

Supongamos ahora que hemos descrito el conjunto Ω mediante un sistema de coordenadas $(u, v, w) \rightarrow \vec{r}(u, v, w)$ con $D = \vec{r}^{-1}(\Omega)$. La fórmula de cambio de variables para la integral de una función integrable $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$\int_{\Omega} f = \int_D (f \cdot \vec{r}) |J\vec{r}| \quad \text{donde } J\vec{r} \text{ es la matriz Jacobiana de } \vec{r}. \quad (\text{C.1})$$

Lo que aplicado a nuestro caso implica

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(\vec{r}(u, v, w)) \left| \det \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw.$$

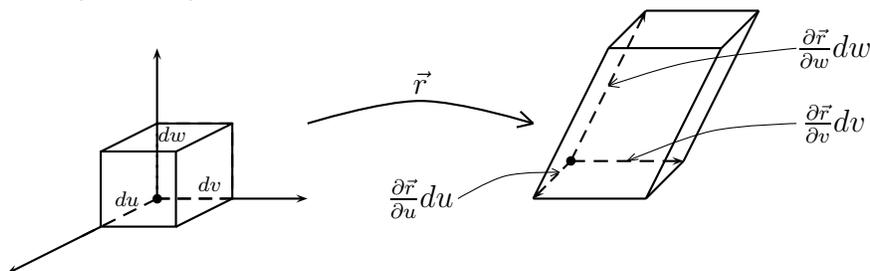
Aplicando lo anterior a la función constante $f \equiv 1$ obtenemos que

$$\text{Vol}(\Omega) = \iiint_D \left| \det \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw = \iiint_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right| du dv dw.$$

Concluyendo que en este caso

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right| du dv dw, \quad (\text{C.2})$$

el cual se interpreta como el volumen infinitesimal que corresponde al paralelepípedo definido por los lados $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$, y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$.



Cuando $\vec{r}(u, v, w)$ define un sistema ortogonal, entonces

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \hat{v} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \hat{w},$$

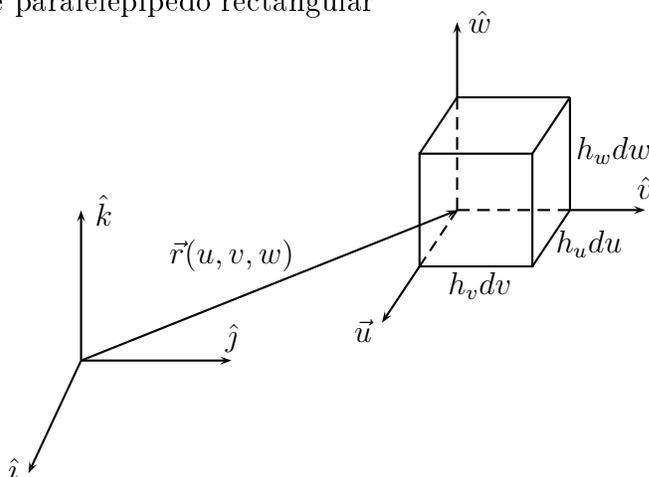
donde $\hat{u}, \hat{v}, y \hat{w}$ son mutuamente ortogonales y unitarios. Es directo entonces ver que

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right| = h_u h_v h_w,$$

y por lo tanto, se concluye de (C.2) que en este caso se tiene

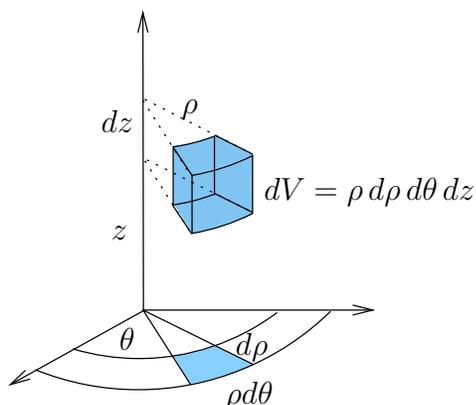
$$dV = h_u h_v h_w du dv dw. \quad (\text{C.3})$$

En otras palabras, para calcular el volumen de Ω se suma sobre todo $(u, v, w) \in D$ el volumen del correspondiente paralelepípedo rectangular



Ejemplo C.0.1. Calculemos el diferencial de volumen para el sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas: **Coordenadas cilíndricas:** (ρ, θ, z) .

Tenemos que $h_\rho = 1, h_\theta = \rho, h_z = 1$, por lo tanto $dV = \rho d\rho d\theta dz$.



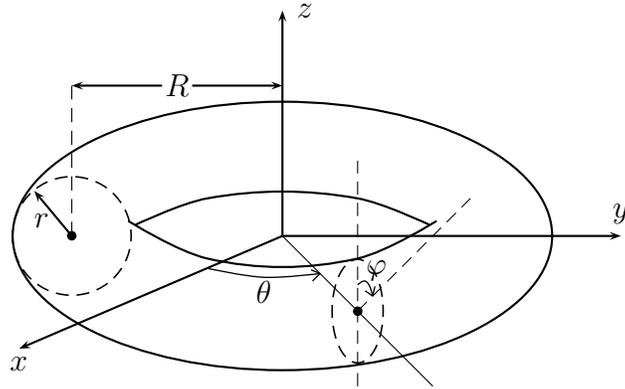
Coordenadas esféricas (r, θ, φ) .

Tenemos que $h_r = 1, h_\theta = r \text{ sen } \varphi, h_\varphi = r$, entonces $dV = r^2 \text{ sen}(\varphi) dr d\theta d\varphi$.

Finalmente, aplicamos lo anterior a las coordenadas toroidales.

Coordenadas Toroidales:

Hemos visto que para el sistema de coordenadas toroidales:



la posición de un punto viene dado por

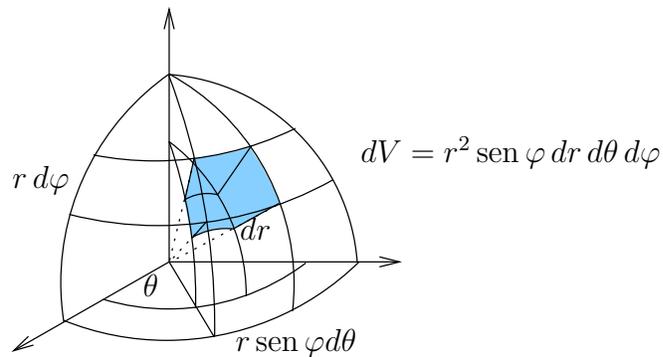
$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = ((R+r \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta), (R+r \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi), \quad r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, 2\pi).$$

De este modo, el diferencial de volumen

$$dV = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi$$

se calcula como sigue

$$dV = r(R + r \operatorname{sen} \varphi) dr d\theta d\varphi. \quad (\text{C.4})$$



Bibliografía

- [1] J. Bak, D.J. Newman, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] A. Castro, *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
- [3] R.V. Churchill, *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [4] J.E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Longman de México, 1998.
- [5] P.V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol. 2, Compañía Editorial Continental, México D.F., 1994.
- [6] C Pita Ruiz, *Cálculo vectorial*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1995
- [7] A.D. Wunsch, *Variable compleja con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1997.