Ejercicio que faltó el otro día en la auxiliar

27 de octubre de 2008

Problema.

Sea $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2+y^2 \geq 1, (x-1)^2+y^2 \leq 1\right\}$ y:

$$T(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right)$$

(a) Dibuje Ω, encuentre y dibuje D tal que $T(D) = \Omega$

(b) Pruebe que T es inyectiva en su dominio

(c) Calcule $\displaystyle\int_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dxdy$

Solución

Resolveremos las partes fundamentales. Los dibujos y la demostración de la inyectividad se las dejo como ejercicios propuestos.

Notemos primero que:

$$\begin{array}{rcl} u & = & x(u^2+v^2) \\ v & = & -y(u^2+v^2) \end{array}$$

Con lo que concluimos que

$$x^2+y^2 = \frac{1}{u^2+v^2}$$

Luego, la primera ecuación que define a Ω nos dice que $u^2+v^2 \leq 1$. Por otro lado, la segunda ecuación se traduce en:

$$x^2-2x+1+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u^2+v^2} \leq 2\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) \Leftrightarrow u \geq \frac{1}{2}$$

Así, tendremos que si definimos $D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2+v^2 \leq 1, u \geq \frac{1}{2}\right\}$, directamente se tendrá que $T(D) = \Omega$. Para calcular la integral bajo este cambio de variables, debemos escribir el determinante del Jacobiano de la inversa de la transformación - qué nombre más largo -. Tenemos que:

$$|J_{T^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{(u^2+v^2)^4} \begin{vmatrix} v^2-u^2 & -2uv \\ 2uv & v^2-u^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(u^2+v^2)^4}\left((v^2-u^2)^2+4u^2v^2\right) = \frac{1}{(u^2+v^2)^4}((u^2)^2+(v^2)^2+2u^2v^2) = \frac{1}{(u^2+v^2)^2}$$

O sea que ya no es 1. Nos queda, sin embargo, la siguiente integral:

$$\int_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_D \frac{u}{u^2+v^2}(u^2+v^2)^2 \cdot \frac{1}{(u^2+v^2)^2} dudv = \int_D \frac{u}{u^2+v^2} dudv$$

Haciendo el cambio a polares, $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$, $\theta = \arctan\frac{u}{v}$, nuevamente usamos el teorema de cambio de variables con $\det J_{T^{-1}} = \rho$. Notamos que al igual que antes nos queda el pedacito de circunferencia con $u \geq \frac{1}{2}$, y nuevamente el ángulo θ se mueve entre $\frac{-\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$, y ρ va entre $\frac{1}{2\cos(\theta)}$ y 1. Así, nos queda lo siguiente:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{2\cos(\theta)}}^{1} \frac{\rho\cos(\theta)}{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta)\left(1 - \frac{1}{2\cos(\theta)}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Y parece que ahora sí que sí. Revísenla pero bueno... se entiende la idea. Nos vemos mañana!