

Auxiliar 7 - MA2A1
26 de Septiembre 2008

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Christopher Hermosilla y Javier Orrego

1. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 . Se define $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = F(\frac{y}{x})$

a) Calcular Δf

b) Determine todas las funciones de $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\Delta f = 0$ con $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$

2. Demuestre que el cambio de variable definido por: $u(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ y $v(x, y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$ Transforma la ecuación

$$y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \text{ en } 2(v^2 - u^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial F}{\partial u} - u \frac{\partial F}{\partial v} \text{ con } F \in \mathcal{C}^2$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Se considera la ecuación de derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (*)$$

a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u=x+y \\ v=2x+y \end{pmatrix}$

Sea $f(x, y) = (g \circ \varphi)(x, y)$ con $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

b) Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

c) Muestre que la ecuación (*) se transforma en $-\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ bajo el cambio de variable.

d) Muestre una expresión general para $f(x, y)$

4. Considere $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $v(x) = u(\frac{x}{(\|x\|_2)^2})$ para $x \neq 0$

$$\text{Demuestre que: } \Delta v(x) = \frac{1}{(\|x\|_2)^4} \Delta u(\frac{x}{(\|x\|_2)^2})$$