MA-11A Álgebra **2 de Noviembre, 2000**

Pauta Control No. 6

PROBLEMA 1:

Hay que encontrar una base de vectores propios de A. Para ello, primero determinamos el polinomio característico de la matriz, i.e., calculamos

$$p(\lambda) \; = \; Det(A-\lambda I) \; = \; (1-\lambda)^2((-1-\lambda)^2-4) \; = \; (1-\lambda)^2(\lambda^2+2\lambda-3)\,.$$

Como $\lambda^2+2\lambda-3=(1-\lambda)(-3-\lambda)$ sigue que $p(\lambda)=(1-\lambda)^3(-3-\lambda)$. Por lo tanto, los valores propios de A son 1 con multiplicidad algebraica 3 y -3 con multiplicidad algebraica 1.

El subespacio de vectores propios W_1 asociado al valor propio 1 se obtiene estudiando el sistema

$$(A-I)\vec{x} \; = \; \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo, se concluye que una base de W_1 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

El subespacio de vectores propios W_{-3} asociado al valor propio -3 se obtiene estudiando el sistema

$$(A+3I)\vec{x} \; = \; \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo, se obtiene que una base de W_{-3} es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Sigue que $A=PDP^{-1}$ con

$$P \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad D \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 2:

(i).- Hay que expresar los elementos de la base β como combinación lineal de los elementos de la base β'. Se observa que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = +1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Observación</u>: Otra forma (bastante más engorrosa) de hacer esta parte es calcular la matriz de pasaje de β' a β (expresado los elementos de β' como combinación lineal de los elementos en β). La matriz pasaje que se obtiene de esta forma es P^{-1}. En particular, se obtiene que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para determinar P hay que invertir P^{-1} y se llega (obviamente) a la misma matriz que se obtuvo antes.

(ii.1).- Del enunciado se desprende que $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A asociados al valor propio 1 y que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio 2.

Claramente los vectores propios asociados a 1 son independientes y como vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes se concluye que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

es una base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios de A. Luego, A es diagonalizable.

(ii.2).- De la parte anterior se deduce que $A = PDP^{-1}$ donde

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Invirtiendo P, se concluye que:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 3:

(i.1).- Basta observar que $A^m = PB^mP^{-1}$, luego A^m y B^m son similares.

(i.2).- Observar que $A^T = (PBP^{-1})^T = (P^{-1})^T B^T P^T = (P^T)^{-1} B^T P^T$. Luego, $A^T = QBQ^{-1}$ donde $Q = (P^T)^{-1}$ es invertible porque la traspuesta de una matriz invertible es invertible. Se concluye que que A^T y B^T son similares.

(ii.1).- Probemos primero que $\mathbb{I}m(T) = \langle\{v\}\rangle$. Por definición de imagen y de T se tiene que

$$\mathbb{I}m(T) = \{T(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \{\langle v, x\rangle v : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Como $\langle v, x\rangle \in \mathbb{R}$ cualquiera se $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathbb{I}m(T) \subseteq \langle\{v\}\rangle$. Para probar que $\langle\{v\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(T)$, supongamos que $w \in \langle\{v\}\rangle$, i.e., que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $w = \alpha v$. Luego, $T(w) = \langle v, w\rangle v = \alpha||v||^2 v = ||v||^2 w$. Sigue, por linealidad de T y puesto que $||v|| \neq 0$, que $T(w/||v||^2) = w$, i.e., $w \in \mathbb{I}m(T)$.

Probemos ahora que $\mathbb{K}er(T) = \langle\{v\}\rangle^{\perp}$. Observar que

$$x \in \langle\{v\}\rangle^{\perp} \Longleftrightarrow \langle v, x\rangle = 0.$$

Como $v \neq 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ debe tenerse que $v_i \neq 0$. Por lo tanto, $\langle v, x\rangle v = 0$ sí y sólo si $\langle v, x\rangle v_i = 0$, o equivalentemente $\langle v, x\rangle = 0$. Sigue que,

$$x \in \langle\{v\}\rangle^{\perp} \Longleftrightarrow \langle v, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow T(x) = 0,$$

Luego, por definición de kernel, $\mathbb{K}er(T) = \langle\{v\}\rangle^{\perp}$.

(ii.2).- Veremos dos formas de hacer esta parte.

- **Primera Forma:** Por Teorema Núcleo Imagen, $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{I}m(T) + \dim \mathbb{K}er(T)$. Como $v \neq 0$, de (ii.1) se tiene que $\dim \mathbb{I}m(T) = 1$. Claramente, $\dim \mathbb{R}^n = n$. La conclusión deseada es inmediata.
- **Segunda Forma:** Observando que $\mathbb{R}^n = \langle\{v\}\rangle \oplus \langle\{v\}\rangle^{\perp}$ se tiene que $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \langle\{v\}\rangle + \dim \langle\{v\}\rangle^{\perp}$. Claramente $\dim \langle\{v\}\rangle = 1$. La conclusión deseada es inmediata.

(ii.3).- De (ii.1) se deduce que $v_i \in \langle\{v\}\rangle^{\perp} = \mathbb{K}er(T)$. Luego, $T(v_i) = 0 = 0 \cdot v_i$, i.e., v_i es un vector propio de T asociado al valor propio 0.

(ii.4).- Debemos encontrar una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T. De (ii.3) tenemos $(n-1)$ vectores propios de T linealmente independientes. Nos falta otro vector propio de T que sea linealmente independiente de $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, en particular que no este asociado al valor propio 0. Luego, dicho vector necesariamente tendrá que estar en $\mathbb{I}m(T) = \langle\{v\}\rangle$. Tomemos en particular v y observemos que $T(v) = \langle v, v\rangle v = ||v||^2 v$, i.e., v es un vector propio de T asociado al valor propio $||v||^2 \neq 0$. Como $v \in \langle\{v\}\rangle^{\perp}$, entonces v es linealmente independiente de $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Se concluye que $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es un conjunto de n vectores propios de T linealmente independientes, luego constituyen una base de $\mathbb{R}^n$.