MA-11A Álgebra **15 de Noviembre, 2001**

Pauta Control 6

PROBLEMA 1:

(i).- Veremos tres maneras de abordar esta parte.

- **Primera forma**: Determinamos el polinomio característico de la matriz A y lo factorizamos, obteniendo (detalles algebráicos omitidos)

$$P_A(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I) = \lambda(1+\lambda)(1-\lambda)^2 .$$

Luego, los valores propios de A son 0, -1 y 1.

Calculamos ahora los espacios de vectores propios asociados a cada valor propio. Estos se determinan ya sea resolviendo un sistema lineal homogéneo o exhibiendo una base de $W_\lambda = \mathbb{K}er(A - \lambda I)$ de tamaño igual a la multiplicidad del valor propio λ). Obtenemos que (detalles algebráicos omitidos),

$$\begin{aligned}
W_0 &= \mathbb{K}er(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\
W_{-1} &= \mathbb{K}er(A+I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\
W_1 &= \mathbb{K}er(A-I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Invirtiendo P se obtiene (detalles algebráicos omitidos) que,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- **Segunda forma**: "Adivinando" los vectores y valores propios.

  Como las dos últimas columnas de A son idénticas, A no es invertible, tiene un valor propio 0 y un vector propio asociado $(0,0,1,-1)^t$, por lo que

  $$W_0 \;=\; \mathbb{K}er(A) \;=\; \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

  Como A es diagonal por bloques y uno de sus bloques es triangular superior los elementos en la diagonal de éste bloque son valores propios. Luego -1 y 1 son valores propios.

  Al calcular los espacios W_{-1} y W_1 como en la **Primera Forma** nos damos cuenta que 1 tiene dos vectores propios linealmente independientes, luego tenemos un total de 4 vectores propios linealmente independientes. Sigue que A no posee más valores propios y el resto de los cálculos es como en la **Primera Forma**.

- **Tercera forma**: Observando que A es diagonal por bloques, en particular

  $$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

  Luego, si $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ y $A_1 = P_2 D_2 P_2^{-1}$ sigue que $A = PDP^{-1}$ donde

  $$P = \begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \\ & P_2^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{pmatrix}.$$

  Cualquiera de los argumentos usados en la **Primera Forma** o la **Segunda Forma** permiten concluir sin mayores dificultades (detalles algebráicos omitidos) que

  $$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_1 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$
  $$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

  Luego,

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(ii).- Veremos dos maneras de abordar el problema

- **Primera Forma**: Sea m cualquiera,

  $$A^m \;=\; (PDP^{-1})^m \;=\; PD^mP^{-1} \;=\; P \begin{pmatrix} 0^m & & & \\ & (-1)^m & & \\ & & 1^m & \\ & & & 1^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si m es impar, dado que los elementos en la diagonal de D pertenecen a $\{-1,0,1\}$, se tiene que $D^m = D$. Luego, $A^m = PDP^{-1} = A$.

Si m es par,

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- **Segunda Forma**: A continuación se describe una forma de abordar esta parte, motivada por el hecho que en la **Primera Forma** descubrimos que los valores propios de A pertenecen a $\{-1,0,1\}$. A priori, no hay como "adivinar" que el siguiente argumento funcionará.

  Primero observamos que $A^1 = A$, luego definimos $M = A^2$ y haciendo un simple producto matricial comprobamos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

  Luego, usando inducción, vemos que si el enunciado es cierto para m, entonces

$$A^m = \begin{cases} A^{m-1}A = A^2 = M, & \text{si } m \text{ es par,} \\ \\ A^{m-1}A = MA, & \text{si } m \text{ es impar,} \end{cases}$$

  Otro producto matricial nos muestra que $MA = A$ y obtenemos la conclusión deseada.

PROBLEMA 2:

(i).- Veamos la linealidad. Sean A y B matrices en $M_{2,2}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que $T(\alpha A + B) = (\alpha A + B + (\alpha A + B)^t)/2 = \alpha(A + A^t)/2 + (B + B^t)/2 = \alpha T(A) + T(B)$.

Calculemos ahora el $\mathbb{K}er(T)$. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $T(A) = 0$. Sigue que

$$0 = T(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}.$$

Luego, $a = d = 0$ y $b = -c$. Por lo tanto, $\mathbb{K}er(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Para calcular el rango de T se puede proceder de dos formas.

- **Primera Forma**: Por Teorema Núcleo-Imagen, $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{K}er(T) + \dim \mathbb{I}m\,(T)$, i.e., $\dim \mathbb{I}m\,(T) = 4 - 1 = 3$.
- **Segunda Forma**: Encontrando una base de $\mathbb{I}m\,(T)$. Para ello, observamos que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces

$$T(A) = \begin{pmatrix} a & (b+c)/2 \\ (b+c)/2 & d \end{pmatrix} . = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(b+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Luego,

$$\mathbb{I}m\,(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Claramente las matrices generadoras de $\mathbb{I}m\,(T)$ son linealmente independientes, luego $\dim \mathbb{I}m\,(T) = 3$.

(ii).- Denotemos por $u_1, \ldots, u_4$ cada una de las cuatro matrices que definen β (en orden de aparición). La matriz solicitada se obtiene de evaluar T en cada elemento de la base β y expresarlo como combinación lineal de los elementos de β.

Luego, como

$$\begin{aligned}
T(u_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4 , \\
T(u_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 , \\
T(u_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3 + 0u_4 , \\
T(u_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4 ,
\end{aligned}$$

la matriz solicitada es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} .$$

(iii).- La matriz de pasaje P que lleva vectores de coordenadas expresados con respecto a la base β en vectores de coordenadas expresados con respecto a la base canónica, se obtienen expresando cada elemento de β como combinación lineal de la base canónica. Como,

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
u_2 &= 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
u_3 &= 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
u_4 &= 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observando que (detalles algebráicos omitidos)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

concluimos que la matriz solicitada es

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 3:

(i).- Por ortonormalidad de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ se tiene que $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ y $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

Si $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, entonces $\langle u, v_j \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle$. Luego, por ortogonalidad de los v_i sigue que $\alpha_j = \langle u, v_j \rangle$ y

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \ldots + \langle u, v_n \rangle v_n = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i\,.$$

De esta última identidad, se obtiene por propiedad de bilinealidad del $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que

$$\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i v_i, \alpha_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\,.$$

Finalmente,

$$Au = A \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \rangle v_i\,.$$

(ii).- Por definición de w y dado que v_1 es unitario,

$$\langle w, v_1\rangle = \langle Au, v_1\rangle - \langle\langle u, v_1\rangle v_1, v_1\rangle = \langle Au, v_1\rangle - \langle u, v_1\rangle\langle v_1, v_1\rangle = \langle Au, v_1\rangle - \langle u, v_1\rangle\,.$$

De la parte (i) y la bilinealidad de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sigue que

$$\langle w, v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i\langle v_i, v_1\rangle - \langle u, v_1\rangle = \lambda_1\langle u, v_1\rangle - \langle u, v_1\rangle = 0\,,$$

donde la penúltima igualdad se tiene porque los v_i son ortonormales y la última igualdad porque $\lambda_1 = 1$.

(iii).- Por (i) y la ortonormalidad de los v_i, $\langle Au, v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i\langle v_i, v_1\rangle = \lambda_1\langle u, v_1\rangle$. Luego, si $u \perp v_1$, entonces $\langle Au, v_1\rangle = 0$, i.e., $Au \perp v_1$.

Por otro lado, nuevamente por (i) y dado que $u \perp v_1$ (por lo que $\alpha_1 = \langle u, v_1\rangle = 0$),

$$||Au||^2 = \langle Au, Au\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\alpha_i)^2 = \sum_{i=2}^{n}(\lambda_i\alpha_i)^2 \leq \lambda_2^2\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i)^2\,,$$

donde la desigualdad se tiene porque $\lambda_2 \geq \lambda_i$ para todo $i \geq 2$

Por (i) y dado que $\alpha_1 = 0$ concluimos que $||Au||^2 \leq \lambda_2^2\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2 = \lambda_2^2||u||^2$.

(iv).- Como $w \perp v_1$, por (iii) tenemos que $Aw \perp v_1$ y $||Aw|| \leq \lambda_2||w||$, nuevamente por (iii) tenemos que $A^2w \perp v_1$ y $||A^2w|| \leq \lambda_2||Aw|| \leq \lambda_2^2||Aw||$, nuevamente ... y por lo tanto $||A^mw|| \leq \lambda_2^m||w||$.

Finalmente, $A^mw = A^{m+1}u - \langle u, v_1\rangle A^mv_1 = A^{m+1}u - \langle u, v_1\rangle v_1$ ya que $\lambda = 1$ implica que $A^mv_1 = \lambda_1^mv_1 = v_1$. Por lo tanto,

$$||A^{m+1}u - \langle u, v_1\rangle v_1|| = ||A^mw|| \leq \lambda_2^m||w|| = \lambda_2^m||Au - \langle u, v_1\rangle v_1|| \to 0\,, m \to \infty\,,$$

donde la convergencia a 0 se tiene del hecho que $\lambda_2 < 1$ y $||Au - \langle u, v_1\rangle v_1||$ no depende de m, i.e., es una constante con respecto a m.