MA1B2 Álgebra Lineal - 2008/02
Profesor: Iván Rapaport Z.
Auxiliares: Johan Van der Molen M. - Mónica Carvajal P.

Soluciones Auxiliar Semanas 6 y 7

25 de Septiembre

P1. Probaremos que todo elemento de $P_2(\mathbb{R})$ es combinación lineal de p_1, p_2, p_3. Sea $p \in P_2(\mathbb{R})$, esto es, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Queremos mostrar que $p(x) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. En efecto, esto se cumple si y sólo si:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda_1(1 + x^2) + \lambda_2(4x) + \lambda_3(1 + 3x + 5x^2)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda_1 + \lambda_3 + (4\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (6\lambda_1 + 5\lambda_3)x^2$$

Igualando coeficiente a coeficiente:

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 + \lambda_3 \\ a_1 &= 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ a_2 &= 6\lambda_1 + 5\lambda_3 \end{aligned}$$

Reescribiendo el sistema en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Pivoteando:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 4 & 3 & a_1 \\ 6 & 0 & 5 & a_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 4 & 3 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & a_2 - 6a_0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{c} \lambda_3 = 6a_0 - a_2 \\ \lambda_2 = \frac{a_1 - 3(6a_0 - a_2)}{4} \\ \lambda_1 = a_2 - 5a_0 \end{array}$$

Luego, tenemos que para cualquier polinomio $p \in P_2(\mathbb{R})$ determinado por sus coeficientes a_0, a_1, a_2, p es combinación lineal de p_1, p_2, p_3 con los lambdas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ igual a los encontrados en el sistema.

P2. En general, para analizar si un conjunto de vectores es l.i o l.d. tenemos que tomar una combinación lineal de dichos vetores igual a 0 y ver qué pasa con los escalares. Si se concluye que necesariamente, todos deben ser nulos, el conjunto es l.i., en caso contrario, i.e. existe un escalar no nulo, el conjunto es l.d., en cuyo caso, el vector asociado al escalar no nulo, podrá escribirse como combinación lineal de los otros.

(a) $\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 1 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 1 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 0 & 22/3 & -22/3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 0 & 22/3 & -22/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_3$ queda

libre, es decir, en particular puede tomar un valor no nulo. $\Rightarrow$ el conjunto es l.d.
En general, cuando queremos verificar si un conjnto de vectores de $\mathbb{R}^n$ son l.i o no, basta ponerlos como columnas en una matriz y pivotear, si al hacer esto, aparece un escalón de largo mayor o igual a 2, el conjunto es l.d., en caso contrario, si todos los escalones son de largo 1, el conjunto es l.i.. Esto se tiene gracias a que lo que uno resuelve es el sistema lineal homogéneo para los escalares. Por otro lado, en este caso, se puede apreciar la denependia lineal de los vetores fácilmente, ya que la resta de los dos primeros vectores es igual al tercer vector, por lo tanto dicho vector es l.d. a los otros dos, por ser combinación lineal de ellos.

(b) $\lambda_1(x^2+1)+\lambda_2(x^2-1)+\lambda_3(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_3)x+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}$$

De aquí se concluye que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ luego, el conjunto es l.i.. En este caso, recordemos que la combinación lineal de polinomios, se iguala al polinomio 0 y no a 0 como número, por esta razón se procede igualando coeficiente a coeficiente.

(c) $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \\ \lambda_3+\lambda_4 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}$$

De aquí se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ por lo que el conjunto es l.i.

P3. (a) Como W, por definición, es generado por el conjunto allí dado, basta extraer un conjunto l.i. de él, para obtener una base de W, si el conjunto completo fuera l.i. él mismo sería la base (Recordemos que una base es un conjunto que genera y es l.i.). Como ya vimos en el problema anterior basta formar la matriz que tiene a los vectores del conjunto, para analizar su dependencia lineal. En este caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, tenemos un escalón de largo 2, es decir, hay un vector l.d. a los otros. Para reparar esto, basta sacar uno de los dos vectores que nos genera dicho escalón. Así, extrayedo el tercer vector, nos quedamos con el conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

que es base de W.

(b) Para extender la base a una de $\mathbb{R}^4$ basta agregar un vector que no sea combinación lineal de los anteriores y luego, hacer lo mismo pero con el cuidado de que no sea combinación lineal de los otros tres. Yo les recomiendo que miren el siguiente conjunto:

$$W^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^4 | \forall w \in W, \langle w, x \rangle = 0\}$$

y encuentren una base de él. Los vectores de dicha base serán los que se tienen que agregar a la base de W para obtener la base de $\mathbb{R}^4$.

Respuesta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

P4. Tenemos que:

$$Z \oplus Y = U \tag{1}$$
$$Z \oplus R = W \tag{2}$$
$$Z = U \cap W \tag{3}$$

Por demostrar que:

$$(Z + Y) \oplus R = U + W$$

Para ello, debemos demostrar dos cosas:

(i) $(Z + Y) + R = U + W$

(ii) $(Z + Y) \cap R = \{0\}$

(i) Probaremos la igualdad de dichos conjuntos, a través de la doble innclusión.
Por (1) tenemos que $Z + Y = U$ y por (2), $R \subseteq W$(En general, claramente se tiene que si $X + Y = Z \Rightarrow X \subseteq Z \wedge Y \subseteq Z$ y la implicancia en el otro sentido es falsa). Por lo tanto,

$$(Z + Y) + R \subseteq U + W$$

Ahora, sea $v \in U + W$, luego v se escribe como $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$. Por (1), $u = z + y$ con $z \in Z, y \in Y$. Por (2), $w = z' + r$ con $z' \in Z, r \in R$. Luego, $v = (z + y) + (z' + r) = ((z + z') + y) + r$. Ahora bien, como Z es s.e.v. es cerrado para la suma, $z + z' \in Z$ y así $v \in (Z + Y) + R$. Esto prueba la otra inclusión, es decir,

$$U + W \subseteq (Z + Y) + R$$

Y por lo tanto, $U + W = (Z + Y) + R$.

(ii) Sea $v \in (Z + Y) \cap R$. Por demostrar que: $v = 0$
Como v está en la intersección, en particular está en $Z + Y$, luego, $v = z + y$ con $z \in Z, y \in Y$. Entonces, dado que $v \in R$, $y = -z + v$ con $-z \in Z, v \in R$, luego $y \in Z + R$, pero $Z + R = W$, entonces $y \in W$. Por otro lado, $Y \subseteq U$, luego $y \in U \Rightarrow y \in U \cap W = Z$. Así, $v = z + y$ con $z \in Z, y \in Z \Rightarrow v \in Z \Rightarrow v \in Z \cap R$(dado que v también está en R). Ahora, como $Z \oplus R$ es suma directa, $Z \cap R = \{0\} \Rightarrow v = 0$.

P5. (a) En general, para probar que un conjunto dado es s.e.v. basta con tomar dos elementos del conjunto y probar que la combinación lineal entre ellos sigue perteneciendo al conjunto. Veamos que en este caso se cumple, en efecto:
Sean $p_1(x), p_2(x) \in V$, luego,

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ p_2(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

Entonces,

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = \lambda_1 \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \lambda_2 \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i) x^i = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$$

Donde,

$$c_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = \lambda_1 a_{m-i} + \lambda_2 b_{m-i} = c_{m-i}$$

Por lo tanto,

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) \in V$$

(b) Para encontrar bases de s.e.v., siempre es recomendable darse un elemento cualquiera del conjunto, aplicarle las restricciones a las que está sujeto y factorizar sus parámetros libres. En este caso:
Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in V$. Dado que $\forall i \in \{0, \ldots, m\}, a_i = a_{m-i}$, en realidad el polinomio es de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots + a_0 x^m$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{m} a_{m-i} x^i$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{m-i}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i (x^i + x^{m-i}) + a_n x^n$$

Luego, vemos que cualquier polinomio en V es combinación lineal de:

$$\mathcal{B} = \{1 + x^m, x + m^{m-1}, x^2 + x^{m-2}, \ldots, x^n\}$$

Por lo tanto, ya sabemos que el candidato a base $\mathcal{B}$ genera a V. Ahora sólo basta probar que es l.i.:
Sea

$$\lambda_1(1 + x^m) + \lambda_2(x + m^{m-1}) + \ldots + \lambda_{n+1} x^n = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_n x^{n-1} + \lambda_{n+1} x^n + \lambda_n x^{n+1} + \ldots + \lambda_1 x^m = 0$$

Igualando coeficiente a coeficiente, se concluye que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Finalmente, dado que la cardinalidad de la base $\mathcal{B}$ de V es $n + 1$, se tiene que $\dim V = n + 1$.

(c) Como ya hemos visto, para probar que un e.v. es suma directa, tenemos que probar dos cosas: 1)que el e.v efectivamente sea la suma y 2)que la intersección entre los s.e.v sumandos sea $\{0\}$. Entonces, probemos primero que $P_m(\mathbb{R}) = V + P_{n-1}(\mathbb{R})$.
Sea $p(x) \in P_m(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_{m-i})x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_{m-i}x^i + a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{m} a_i x^i$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_{m-i})x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_{m-i}x^i + a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{m-i}x^{m-i}$$

$$p(x) = \underbrace{(\sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_{m-i})x^i)}_{\in P_{n-1}(\mathbb{R})} + \underbrace{(\sum_{i=0}^{n-1} a_{m-i}(x^i + x^{m-i}) + a_n x^n)}_{\in V}$$

Donde el primer término es un polinomio de grado $n-1$ y el segundo término está en V por ser combinación lineal de elementos de su base.
Ahora debemos probar que la intersección es sólo el 0. En efecto,
Sea $p(x) \in V \cap P_{n-1}(\mathbb{R})$, como $p(x) \in P_{n-1}(\mathbb{R})$,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

Y como además $p(x) \in V$,

$$a_0 = a_m = 0$$

y en general,

$$\forall i = 0 \ldots n-1, a_i = a_{m-i} = 0$$

Luego, $p(x) = 0$.

(d) Probemos que $P_m(\mathbb{R}) = V + V'$:

Sea $p(x) \in P_m(\mathbb{R})$, queremos que: $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}_{p_1(x) \in V} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} c_i x^i}_{p_2(x) \in V'}$. Donde claramente:

$$a_i = b_i + c_i, \forall i \in \{0, \ldots, m\} \tag{4}$$

Pero como $p_1(x) \in V$, $b_i = b_{m-i}$ y como $p_2(x) \in V'$, $c_i = -c_{m-i}$. Así,

$$a_{m-i} = b_i - c_i, \forall i \in \{0, \ldots, m\} \tag{5}$$

Luego, de (4) y (5) se tiene que:

$$b_i = \frac{a_i + a_{m-i}}{2},\ c_i = \frac{a_i - a_{m-i}}{2}$$

De esta manera, hemos probado que cualquier polinomio en $P_m(\mathbb{R})$, se puede escribir como suma de un polinomio en V y uno en V', definiendo los respectivos coeficientes tal como los encontramos resolviendo el sistema.
Ahora sólo basta probar que $V \cap V' = \{0\}$.

P6. **(a)** **(1)** Como ya vimos, la manera de demostrar que un cierto conjunto es s.e.v. es tomar dos elementos de dicho connjunto y probar que su combinación lineal también pertenece al conjunto.
En este caso, aquello se cumple. En efecto:
Sean $y_1, y_2 \in A(V)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Por definición de A(V), existen $v, w \in V$ tales que $y_1 = Av$ y $y_2 = Aw$. Ahora, como V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, tenemos que $\lambda_1 v + \lambda_2 w \in V$ y por lo tanto $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 Av + \lambda_2 Aw = A(\lambda_1 v + \lambda_2 w) \in A(V)$.

(2) Nuevamente, para probar que es suma directa debemos probar dos cosas:
Primero, $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$. En efecto,
sea $z \in \mathbb{R}^n$. Como A es invertible(por hipótesis de enunciado), el sistema $Ax = z$ tiene solución $x \in \mathbb{R}^n = V \oplus W$. Luego, $x = v + w$ con $v \in V, w \in W$. Entonces, $z = Ax = A(v + w) = Av + Aw \in A(V) + A(W)$.
Ahora probemos que $A(V) \cap A(W) = \{0\}$.
Sea $z \in A(V) \cap A(W)$. Como $z \in A(V), \exists v \in V$ tal que $z = Av$ y como a la vez, $z \in A(W), \exists w \in W$ tal que $z = Aw$. Entonces, $A(v - w) = Av - Aw = z - z = 0$. Como A es invertible, esto implica que $v = w$. Luego, esta igualdad nos dice que un elemento de V es un elemento de W, lo cual implica necesariamente que el elemento está en $V \cap W$, esto es, $v \in V \cap W$, pero por hipótesis, $V \cap W = \{0\}$, por ser suma directa de $\mathbb{R}^n$. Así, $v = 0 \Rightarrow Av = z = 0$.

(3) En esta parte, probaremos que $\forall z \in \mathbb{R}^n$, el sistema $Ax = z$ tiene solución, lo cual es equivalente a probar que A es invertible. En efecto, sea $z \in \mathbb{R}^n$, dado que por hipótesis $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, podemos escribir $z = y_1 + y_2$ con $y_1 \in A(V)$ e $y_2 \in A(W)$. Por lo tanto, $\exists v \in V, w \in W$ tales que $y_1 = Av$ e $y_2 = Aw$. Luego, $z = Av + Aw = A(v + w)$, es decir, $\forall z \in \mathbb{R}^n$ el sistma $Ax = z$ tiene solución el vector $x = v + w$ recién encontrado. Así, A es invertible.

(b) **(1)** Sean $A, B \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Por demostrar que: $\lambda_1 A + \lambda_2 B \in E$. Esto es equivalente a $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)(\mathbb{R}^n) \subset W$, lo cual, a su vez es equivalente a tener que $\forall x \in \mathbb{R}^n, (\lambda_1 A + \lambda_2 B)x \in W$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Luego, $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)x = \lambda_1 Ax + \lambda_2 Bx$. Ahora bien, como $A, B \in E$, se tiene que $Ax \in W, Bx \in W$ y como W es s.e.v. se concluye que $\lambda_1 Ax + \lambda_2 Bx \in W$.

(2) En esta parte, W es el s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $(1, 1)$. Para calcular la dimensión de E, debemos encontrar una base de este s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}$ y mirar su cardinalidad.
Procederemos de la misma manera que en el problema 5 parte b), ya que como ahi aparece, es la manera más recomendable de encontrar bases.
Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in E$, luego, $A(\mathbb{R}^2) \subset W$, esto es, $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, Ax \in W$. Así, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in W$$

Luego, tomando $x_1 = 1 \wedge x_2 = 0$, se tiene que $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \in W \Rightarrow a_{11} = a_{21}$. Por otro lado, tomando $x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$, se tiene que $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in W \Rightarrow a_{12} = a_{22}$. Luego, A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, claramente, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, genera E y es l.i. luego es base de E, por lo tanto, $\dim E = 2$.

P7. **(a)** Sea $p(x) \in W_1$. Luego, $p(x)$ es de la forma:

$$p(x) = (x-1)q(x) \text{ donde } gr(q) \leq 3$$

Luego, $q(x)$ es una combinación lineal de la base canónica de $P_3(\mathbb{R})$. Con esto, tenemos que una posible base para W_1 es:

$$\left\{(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2, (x-1)x^3\right\}$$

Dada la construcción del conjunto, sabemos que genera. Ahora, basta probar que el conjunto es l.i.:

$$\lambda_1(x-1) + \lambda_2(x-1)x + \lambda_3(x-1)x^2 + \lambda_4(x-1)x^3 = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x + (\lambda_2 - \lambda_3)x^2 + (\lambda_3 - \lambda_4)x^3 + \lambda_4 x^4 = 0$$

Igualando coeficiente a coeficiente, se tiene que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Así, el conjunto es l.i y es base de W_1. Análogamente, se prueba que una base de W_2 es:

$$\left\{(x-2), (x-2)x, (x-2)x^2, (x-2)x^3\right\}$$

Luego, $\dim W_1 = \dim W_2 = 4$.

(b) Sea $p(x) \in P_4(\mathbb{R})$. $p(x)$ siempre se puede escribir de la forma:

$$p(x) = \underbrace{p(x) - p(1)(2-x)}_{\in W_1} + \underbrace{P(1)(2-x)}_{\in W_2}$$

Donde claramente el primer término está en W_1 ya que se anula al evaluar en 1, y el segundo término está en W_2 por la misma razón sólo que con 2. De esta manera, $p(x) \in W_1 + W_2$.
Ahora veamos si es suma directa o no:
Ocupando el teorema:

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

En este caso se tiene que:

$$\dim(P_4(\mathbb{R})) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$\Rightarrow 5 = 4 + 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 3$$

Luego, se tiene que $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ por argumentos de dimensión, ya que sabemos que la dimensión de $\{0\}$ es 0.
Por lo tanto, la suma **no** es directa.