Aux - Semana 3

Recuerdo:
- $I_{pq} \cdot A$: Intercambia las filas p y q de A.
- $E_{p,q}(\lambda, \beta) \cdot A$: cambia fila q de A, que ahora será la suma de la fila p ponderada por λ y la fila q ponderada por β.

* Cuando $\beta = 1$, se usa

$$E_{p,q}(\lambda)$$

fila a ponderar por λ ↗ ← fila que cambia

Para recordar la forma de la matriz, se le realizan los cambios a la identidad. Ej. para matrices en $M_{4,4}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,4}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cambia la fila 4 sumandole la fila 2 ponderada por 3

Sistemas Lineales

Se quiere resolver un sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + \dots\dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \;\; \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots\dots + a_{mn} x_n = b_m \end{matrix}$$

Para hacerlo escribimos las ecuaciones de forma matricial!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff AX = b$$

$A \in M_{mn}(\mathbb{K}) \quad X \in \mathbb{K}^n \quad b \in \mathbb{K}^m$

Se escalona la matriz A, es decir, mediante premultiplicaciones por matrices elementales llegamos a una matriz $\bar{A}$ triangular superior. $\bar{A} = \prod_i E_i \cdot A$

Para lograrlo se construye la matriz aumentada

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Luego $\bar{A}^* = (\bar{A}|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \bar{a}_{11} & & & & & \bar{b}_1 \\ & 0 \cdot \bar{a}_{j} & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \bar{a}_{s i_s} & \cdots \; \bar{a}_{sn} & \bar{b}_s \\ 0 & & & & 0 & \bar{b}_m \end{array}\right)$

Finalmente resolvemos todo el sistema partiendo desde la última fila.

Nota: Nosotros resolvemos el sistema $\bar{A}\vec{x} = \bar{b}$ que tiene la misma solución de $Ax = b$, ya que $\bar{A} = \prod_i E_i \cdot A$ y $\prod E_i$ es invertible

P1 Resuelva el sgte. sist. de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

<u>Sol:</u> Identificamos la matriz A y los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = b \; ; \; A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = b$$

Se escribe la matriz aumentada. $(A|b)$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} \overset{\text{Pivote}}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

· Se desea cambiar la fila 3 $\Rightarrow q = 3$
y usando la fila 1 $\Rightarrow p = 1$
$\lambda = 1$, $\therefore$ la matriz es $E_{1,3}(1)$

$E_{13}(1) \cdot A^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \overset{\text{Pivote}}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] = A^{(2)}$$

cambiar fila 4 $\Rightarrow q = 4$
usando fila 1 $\Rightarrow p = 1$
$\lambda = -1 \Rightarrow E_{1,4}(-1)$

$E_{14}(-1) \cdot A^{(2)}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{\text{Nuevo Pivote}}{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] = A^{(3)}$$

Cambiar fila 4 $\Rightarrow q = 4$
Usando fila 2 $\Rightarrow p = 2$
$\lambda = -2 \Rightarrow E_{24}(-2)$

$E_{24}(-2) \cdot A^{(3)}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = A^{(4)}$$

Es triangular superior, $\therefore$, terminamos de escalonar y resolvemos el sistema

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow x_3 = 5/3$

$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 5/3 = -2/3$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 5/3 + 2/3 = 0$

Entonces la solución es única

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

En general, ¿Cuándo podemos resolver un sist. lineal?

Primero distinguimos 2 casos particulares

Compatible: En términos simples, corresponde a un sistema que al tratar de resolverlo no nos encontramos con cosas de la forma $0 \cdot x_i \neq 0$.

Sistema Homogeneo: $A \cdot X = 0$

En este sist. siempre encontraremos al menos una solución, la trivial $x=0$.

En general

1.- Nº de incógnitas (n) > Nº de ecuaciones (m)

de Soluciones

$0 \rightarrow$ Si el sist. es incompatible

$\infty \rightarrow$ Para cualquier otro sist compatible

* Vemos que no puede tener sol única, ya que solo podemos despejar una incognita por ecuación.

2.- Nº de incógnitas (n) $\leq$ Nº de ecuaciones (m)

* En este caso depende de la matriz escalonada.

Soluciones

$0 \rightarrow$ Sist. incompatible

$1 \rightarrow$ Podemos despejar todas las incognitas

$\infty \rightarrow$ No podemos despejar todas las variables, i.e, Algun $x_i = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Teorema:

A invertible $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax=b$ tiene solución única

$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$ ($\tilde{a}_{ii}$ elementos de la diagonal de la matriz escalonada)

$\boxed{P2}$ Para que valores de a, b y c, $Ax=0$ tiene solución única

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Pivote

Sol: $A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{array}\right)$ cambiar fila 2 $\Rightarrow q=2$, usando fila 1 $\Rightarrow p=1$, $\lambda = -a$

$E_{12}(-a) \cdot A^{(1)}$

$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{array}\right)$ cambiar fila 3 $\Rightarrow q=3$, usando fila 1 $\Rightarrow p=1$, $\lambda = -a^2$

Nuevo Pivote

$E_{13}(-a^2) \cdot A^{(2)}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & 0 \end{array}\right) = A^{(3)}$ Como $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, $\lambda = -(a+b)$

$E_{23}(-(a+b))$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & 0 \end{array}\right) = A^{(4)}$ *

$*$ $c^2-a^2 + (c-a) \cdot -(a+b)$
$= c^2-a^2 - (c-a)(a+b)$
$= (c-a)(c+a) - (c-a)(a+b)$
$= (c-a) \cdot (c+a-a-b)$
$= (c-a)(c-b)$

$A^{(4)}$ es triangular superior, y por teo. anterior para que $Ax=0$ tenga solución única los elementos de la diagonal deben ser $\neq 0$

$b-a \neq 0$
$\Rightarrow b \neq a$

$(c-a)(c-b) \neq 0$
$\Rightarrow c \neq a \wedge c \neq b$

P3 i) Demuestre que

$$A \text{ invertible} \iff A \cdot A^T \text{ invertible}$$

Sol:

$\Rightarrow$) A invertible $\Rightarrow$ (Teorema visto en clase anterior)

A^T es invertible

y como multiplicación de matrices invertibles es invertible

AA^T es invertible.

$\Leftarrow$) Como AA^T es invertible, sabemos que existe $(AA^T)^{-1}$ tal que

$$(A \cdot A^T)(AA^T)^{-1} = I \quad \text{// Por asociatividad}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot (A^T(A \cdot A^T)^{-1}) = I$$

Es decir, encontramos una matriz que multiplicada por A da la identidad, esto es, encontramos la inversa

$A^{-1} = A^T(A \cdot A^T)^{-1}$ por lo tanto, A es invertible

ii) Si $A^2 = A$ y $B = I - A \Rightarrow B^3 = B$

Sol: $B^2 = (I - A)^2 = I - 2A + A^2$ // como $A^2 = A$

$= I - 2A + A = I - A = B \Rightarrow \boxed{B^2 = B}$

$\Rightarrow$

$B^3 = B^2 \cdot B = B \cdot B$ // $B^2 = B$

$= B^2 = B$

$\Rightarrow \boxed{B^3 = B}$

Inversa

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada realizamo lo sgte:

1.- Se construye la matriz $(A|I)$

2.- Pivoteamos igual como cuando resolvemos un sist. hasta llegar a una matriz triangular superior.

3.- Usamos de pivote el elemento que queda en la última fila, hasta llegar a una matriz diagonal.

4.- PreMultiplicamos por la matriz D (diagonal), para obtener la identidad al lado izquierdo.

LA matriz que obtenemos al lado derecho es la inversa de A.

P4 Calcule la inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivote

Sol: $(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Cambian fila 2 $\Rightarrow q=2$, usando fila 1 $\Rightarrow p=1$, $\lambda=-2$

$E_{12}(-2)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

cambian fila 3 $\Rightarrow q=3$, usando fila 1 $\Rightarrow p=1$, $\lambda=-1$

Nuevo Pivote

$$\xrightarrow{E_{13}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{24}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora intercambiamos las filas 3 y 4 y comenzamos a pivotear "hacia arriba" hasta llegar a la diagonal.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\bar{3}) = (3) - 2\cdot(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(\bar{2}) = (2) + 2\cdot(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\bar{1}) = (1) - (4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Nuevo Pivote

$$\xrightarrow{(\bar{2}) = (2) + 2\cdot(3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\bar{1}) = (1) - (3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Finalmente llegamos a una matriz diagonal que queremos transformar en la identidad. Recordamos

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{1\cdot} \\ \vdots \\ \lambda_n A_{n\cdot} \end{pmatrix}$$ donde $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son los elementos de la diagonal.

De esta forma para transformar la matriz anterior premultiplicamos por $D = \text{diagonal}(1, 1, -1/2, -1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ //