Complementos C3 Algebra lineal Parte 1

Profesor: María Leonor Varas
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P1 a) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ no invertible, simétrica tal que

$$Ker(A+I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

i) Demuestre que los valores propios de A son 0 y -1.

ii) Demuestre que $Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Sol Antes de comenzar con las soluciones recordemos un par de propiedades importantes:

- λ es vp de $A \Leftrightarrow Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.
- 0 es vp de $A \Leftrightarrow A$ es no invertible.

Estas propiedades son casi directas de la definición de valores y vectores propios (estudielas!!!).

i) Por la segunda propiedad recordada, como nos dicen que A es no invertible, concluímos rápidamente que 0 es vp de A.

Ahora escribamos de otra forma el otro dato que nos dan en el enunciado:

$$Ker(A+I) = Ker(A-(-1)I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

En otras palabras, $Ker(A-(-1)I) \neq \{0\}$. Así, usando la primera propiedad recordada, podemos decir que -1 es vp de A.

Pregunta: *¿Puede tener A más valores propios?*

Recordemos otras propiedades que nos ayudarán en la respuesta.

De la tutoría de la semana 11[1]

$$\gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda)$$

y

$$\sum_{\lambda\ vp\ de\ A} \alpha_A(\lambda) = n$$

(Para pensarlo un poco: la última propiedad es válida puesto que el polinomio característico es de grado n).

Apliquemos lo anterior a nuestro caso, $n = 3$.

Del enunciado, $\gamma_A(-1)$ es 2, pues $Ker(A + I)$ posee 2 vectores l.i. .

Por otro lado, $\gamma_A(0)$ es como mínimo 1, pues siempre debe haber al menos un vector propio asociado a cada valor propio.

Entonces, como

$$\gamma_A(0) + \gamma_A(-1) = 2 + 1 = 3$$

y dado que sabemos que

$$\gamma_A(0) + \gamma_A(-1) \leq \sum_{\lambda\ vp\ de\ A} \gamma_A(\lambda) \leq \sum_{\lambda\ vp\ de\ A} \alpha_A(\lambda) = n = 3$$

vemos que A no puede tener más valores propios, pues de lo contrario

$$\sum_{\lambda\ vp\ de\ A} \alpha_A(\lambda) \geq \sum_{\lambda\ vp\ de\ A} \gamma_A(\lambda) > n = 3$$

Si les parece muy complicado de esa manera, lo que estamos usando se puede resumir en la siguiente frase:

Una matriz $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ no puede tener más de n vectores propios.

Así, como A tenía 2 vectores propios asociados a -1 y al menos un vector propio asociado a 0, A no podía tener más valores propios, pues de lo contrario, A tendría más de 3 vectores propios asociados.

Resumiendo, los valores propios de A son exactamente 0 y -1, que es justo lo que nos pedían probar en el enunciado.

[1] γ es *multiplicidad geométrica* y α *multiplicidad algebraica*. Si no las recuerda estudielas, pues son nociones importantes.

II) Primero, nos tenemos que dar cuenta de que $Ker(A)$ es, nada más y nada menos, que el espacio propio asociado al valor propio 0, pues

$$Ker(A) = Ker(A - 0I)$$

En la parte anterior, vimos que

$$\sum_{\lambda \ vp \ de \ A} \alpha_A(\lambda) = \sum_{\lambda \ vp \ de \ A} \gamma_A(\lambda) = 3$$

Lo que nos dice, necesariamente, que $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$, para todo λ valor propio de A. Es decir, la matriz A es diagonalizable[2]

Otra forma de concluir que A es diagonalizable es decir que sabemos, de la parte anterior, que A tiene al menos 3 vectores propios y que estamos en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto esos 3 vectores propios deben ser base (A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ Existe una base de $\mathbb{R}^n$ vectores propios de A).

Como conocemos el espacio propio asociado a -1, $Ker(A + I)$, para conocer el resto de la base de vectores propios, sólo nos falta encontrar $Ker(A)$.
Por lo tanto, si lo pensamos un poco, completando $Ker(A+I)$ a una base de $\mathbb{R}^3$ entonces estamos listos (pues el vector que le agregue necesariamente debe pertenecer a $Ker(A)$).
Queda propuesto completar la base, ya sea "al ojo" o usando alguno de los métodos visto en en clases.

HINT: encuentre un vector ortogonal a $Ker(A + I)$. Otra forma: agregue los vectores canónicos a $Ker(A+I)$ y de ese conjunto extraiga una base de $\mathbb{R}^3$.
Finalmente, luego de completar la base, verifique que se obtiene:

$$Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

O sea, el vector que completa la base es de la forma $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

[2]Esto ya lo sabíamos, pues el enunciado nos dice que la matriz A es simétrica, por lo tanto es diagonalizable (*simetrica* $\Rightarrow$ *diagonalizable*). Entonces UD podría haber usado directamente esa propiedad, sin necesidad de referirse a los α y γ (multiplicidades).

$\boxed{\textbf{P2}}$ Sea $v \in I\!R^n$, $v \neq 0$ y $T : I\!R^n \to I\!R^n$ la aplicación lineal tal que $T(x) = \langle v, x \rangle\, v$.

a) Pruebe que $Im(T) = \langle \{v\} \rangle$ y que $Ker(T) = \langle \{v\} \rangle^{\perp}$.

b) Pruebe que $dim\,(Ker(T)) = n - 1$.

c) Sea $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $\langle \{v\} \rangle^{\perp}$. Pruebe que $v_1, \ldots, v_{n-1}$ son vectores propios de T asociados al valor propio 0.

d) Pruebe que T es diagonalizable, i.e., que existe una base de $I\!R^n$ de vectores propios de T.

$\boxed{\textbf{Sol}}$

a) Como consejo, siempre es bueno probar las igualdades de conjuntos como 2 inclusiones.

Probemos que $Im(T) = \langle \{v\} \rangle$:

$\subseteq$ Si $y \in Im(T)$, entonces $\exists x$ tal que $y = T(x)$, o sea, $y = \langle v, x \rangle\, v$.

Como, $\langle v, x \rangle \in I\!R$ (es un escalar), es directo que $y \in \langle \{v\} \rangle$.

$\subseteq$ Tomemos ahora un tipo $y \in \langle \{v\} \rangle$. Por definición, $\exists\ a \in I\!R$ tal que $y = av$.

Para ver que $y \in Im(T)$ nos basta encontrar un x que cumpla $\langle v, x \rangle = a$, pues así $T(x) = av = y$.

Después de cranearnos un poco (o en su defecto golpearse la cabeza contra la pared), nos damos cuenta que basta tomar $x = \frac{av}{\|v\|^2}$, pues calculando

$$\langle v, x \rangle = \left\langle v, \frac{av}{\|v\|^2} \right\rangle = \frac{a}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle = a$$

Por lo tanto, $y \in Im(T)$.

Para probar la otra igualdad usaremos la definición de $Ker(T)$

$$Ker(T) = \{x \in I\!R^n\ :\ T(x) = 0\} = \{x \in I\!R^n\ :\ \langle v, x \rangle\, v = 0\} = \{x \in I\!R^n\ :\ \langle v, x \rangle = 0\}$$

La última igualdad, pues sabemos que $v \neq 0$, por lo tanto el escalar que lo multiplica debe ser 0. Entonces

$$Ker(T) = \{x \in I\!R^n\ :\ \langle v, x \rangle = 0\} = \langle \{v\} \rangle^{\perp}$$

b) Esta parte huele a TNI, pues nos preguntan sobre $dim\,(Ker(T))$. Enunciemos el TNI aplicado a nuestro caso:

$$dim\,(\mathbb{R}^n) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))$$

Claramente, de la parte anterior, $dim\,(Im(T)) = 1$ y sabemos que $dim\,(\mathbb{R}^n) = n$, por lo tanto el TNI nos dice que

$$n = dim\,(Ker(T)) + 1$$

Luego,

$$dim\,(Ker(T)) = n - 1$$

c) Veamos, que un vector w sea vector propio de T asociado a 0 significa que

(i) $w \neq 0$

(ii) $T(w) = 0 \cdot w$[3]

Veamos, como los vectores $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ son base, entonces son todos no nulos, luego cumplen (i).

Por otro lado, nos dicen que esos vectores son base de $\langle\{v\}\rangle^{\perp} = Ker(T)$, con esto, $\forall i = 1, \ldots, n-1$

$$T(v_i) = 0 = 0v_i$$

Es decir se cumple (ii). Luego, efectivamente los vectores $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ son vectores propios asociados al valor propio 0.

d) Primero, sabemos que tenemos n vectores propios (la mínima cantidad de vectores que necesitamos para una base de $\mathbb{R}^n$):

- $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ asociados al valor propio 0.
- v es vector propio de T, pues se cumple

$$T(v) = \langle v, v\rangle\, v = \|v\|^2\, v$$

en otras palabras, es vector propio de T asociado al valor propio $\|v\|^2$.[4]

[3] En particular, $T(w) = 0$, ie, $w \in Ker(T)$.

[4] Como observación, note que el espacio propio asociado es $Im(T)$.

Pregunta: *¿Serán esos n vectores l.i.?*

La respuesta es positiva, llamando $v_n = v$, consideremos una combinación lineal de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ que valga 0

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Queremos concluir que todos los α_i son 0, ie, $\forall\ i,\ \alpha_i = 0$.
Si aplicamos producto punto con v_n a ambos lados de la ecuación[5] obtenemos:

$$\left\langle v_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle = \langle v_n, 0 \rangle$$

lo que, aplicando la linealidad del producto punto, es igual a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_n, v_i \rangle = 0$$

Pero, como $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\} \subseteq \langle \{v_n\} \rangle^{\perp}$ se obtiene

$$\alpha_n \|v_n\|^2 v = 0$$

como $v_n \neq 0$ se concluye $\alpha_n = 0$. Así, la combinación lineal nos queda

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$$

Ahora, como $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es un conjunto l.i. se concluye que el resto de los escalares también es 0.

Conclusión: Los n vectores son l.i., por lo tanto son una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T. Así, T es diagonalizable.

[5] ESto es un truco muy usado para demostrar l.i, cuando hay ortogonalidad.