FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N° 13

13 de Noviembre de 2008

P1 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, simétrica. Considere $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sus valores propios, ordenados de menor a mayor, y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sus respectivos vectores propios formando una base ortonormal (¿existe siempre tal base?).

a) Pruebe que, $\forall x \neq 0, \quad \lambda_1 \leq \frac{x^t Ax}{x^t x}$.

b) Encuentre explícitamente el conjunto $V_k^{\perp} = \{v_1, \ldots, v_k\}^{\perp}$.

c) Dado $k > 1$ demuestre que $\forall x \in V_{k-1}^{\perp} \backslash \{0\}, \quad \lambda_k \leq \frac{x^t Ax}{x^t x}$.

P2 Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$Ker(A - I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \; y \; Ker(A - 2I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

a) Pruebe que A es diagonalizable.
HINT: encuentre una base de vectores propios de A.

b) Encuentre A.
HINT: Una forma de hacerlo es calculando Ae_i, con e_i el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (Ae_i es la columna i-ésima de A).

c) ¿Es A invertible? Justifique.

P3 Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Se sabe que A es simétrica y que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio 2, y además la dimensión del $Ker(T)$ es igual a 2. Calcular A.

P4 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Probar que los valores propios de A son todos reales mayores o iguales que cero.

P5 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Demuestre que:

a) λ es valor propio de A asociado al vector propio v si y sólo si $(1 + \lambda)$ es valor propio de $(I + A)$ asociado al vector propio v.

b) A es semi-definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son mayores o iguales a cero.

c) Si A es semi-definida positiva entonces $(I + A)$ es definida positiva.

P6 Sean $k, n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Demuestre que 0 es el único valor propio de A y concluya que A no es diagonalizable.

P7 Sea $n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es diagonalizable entonces $Ker(A^2) \subseteq Ker(A)$

P8 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Pruebe que existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que $A = B^T B$ sí y sólo si A es simétrica y definida positiva. Concluya que si A es simétrica definida positiva, entonces existen $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$

P9

a) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétricas. Demuestre que si A es definida positiva y B es semi-definida positiva entonces $A + B$ es definida positiva.

b) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica e invertible. Demuestre que A^2 es simétrica definida positiva.

P10 Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, diagonalizable, es decir, $A = PDP^{-1}$, con P invertible y D diagonal. Pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $[P^t]^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.

P11 Sean $R, S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, con S invertible. Considere $A = R \cdot S$ y $B = S \cdot R$.

a) Pruebe que $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si Sv es vector propio de B asociado al mismo valor propio λ. Concluya que A y B poseen los mismos valores propios.

b) Sean $U_\lambda(A) = \mathbb{K}er(A - \lambda I)$ el subespacio propio de A asociado al valor propio λ y $U_\lambda(B) = \mathbb{K}er(B - \lambda I)$ el subespacio propio de B asociado a λ. Pruebe que $dim(U_\lambda(A)) = dim(U_\lambda(B))$.

c) Pruebe que A es diagonalizable si y sólo si B es diagonalizable.

P12 Considere la matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d > 0$. Pruebe que A es diagonalizable.

P13 Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión de n'umeros reales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u_0 = 1,\ u_1 = a$ y $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = au_{n-1} - u_{n-2}$.

Sean $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall\ n \geq 1,\ x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demuestre que $\forall\ n \geq 0$ se tiene que $x_n = A^n x_0$.

b) Pruebe que si $|a| = 2$ entonces A no es diagonalizable.

c) Demuestre que si $|a| > 2$ entonces A es diagonalizable.

Suponga que $|a| > 2$ y que λ_1, λ_2 son los valores propios de A. Pruebe que:

d) $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A, asociados a λ_1 y $\lambda - 2$, respectivamente.

e) $\forall\ n \geq 0,\ u_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$

Recuerditos?

- Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, simétrica se dice *definida positiva* si $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x^t Ax > 0$.
- Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, simétrica se dice *semi-definida positiva* si $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ x^t Ax \geq 0$.
- Análogamente se *definida negativa* y *semi-definida negativa*, cambiando "$>, \geq$" por "$<, \leq$", o bien, "A" por "$-A$".

''Hoy 13 de Noviembre es la clase 13 con 13 problemas'' o.O