FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N° 11

30 de Octubre de 2008

P1 Encuentre los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

P2 a) Dado $\theta \in \mathbb{R}$ se define la función $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$\mathcal{R}_\theta\,(x,y) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$$

Calcule el determinante de alguna matriz representante de $\mathcal{R}_\theta$, con respecto a bases elegidas de alguna manera por Ud. ¿Depende el valor del determinante de las bases que Ud escogió?¿Porqué? Demuéstrelo.

b) Sea $A \in M_{n\times n}$ una matriz antisimétrica (ie, $A^t = -A$). Pruebe que si A es invertible, entonces n es par.

HINT: Use de alguna manera creativa el determinante ($det(\cdot)$).

P3 Calcule

$$det\left(\begin{bmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}\right)$$

HINT: Use las conocidas y famosísimas propiedades del determinante para simplificar los cálculos.

P4 Encuentre los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P5 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Suponga que A es una matriz *idempotente*, es decir, $A^2 = A$. Encuentre todos los valores posibles que puede tomar $det(A)$.

HINT: Encuentre y resuelva una ecuación en la variable $det(A)$.

b) Pruebe que, $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

HINT: Utilice n veces la propiedad 1 de la Proposición 5.2 que aparece en la Tutoría de la semana 10. Otra forma de hacerlo es usando la definición de determinante.

P6 Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define, para el polinomio $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, el *polinomio evaluado en la matriz* como

$$q(A) = b_0 I + b_1 A + \cdots + b_n A^n$$

con I la matriz identidad de $n \times n$.

Suponga que A es una matriz diagonalizable, y sea $p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n$ el polinomio característico de A. Demuestre que $p(A) = 0$ (la matriz nula de $n \times n$).

P7 Sean $x,\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y considere la matriz $A = x \cdot y^t \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Demuestre que x es $\vec{vp}$ de A.

b) Suponga que $< x, y > \neq 0$ y calcule todos los valores propios de A.

c) Suponga que $< x, y >= 0$. Sea $S = \langle\{y\}\rangle^{\perp}$ y considere una base de S de la forma $\{x, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$.

Sea $\beta = \{x, v_2, \ldots, v_{n-1}, y\}$. Calcule $[A]_{\beta\beta}$.

P8 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Usted sabe que 1 y -3 son valores propios de T y que sus vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la definición de T.

P9 Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio por la izquierda (vpi)* de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ si existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,*vector propio por la izquierda* asociado a λ, tal que $v^t A = \lambda v^t$. Pruebe que el conjunto de los *vpi* de A es exactamente igual al conjunto los valores propios que Ud. conoce. ¿Se pueden comparar de la misma forma los vectores propios por la izquierda y los vectores propios "normales"? Demuestre su afirmación o dé un contraejemplo.

P10 Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice *totalmente unimodular (T.U.)* si toda submatriz cuadrada B de A[1] cumple que $det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

a) Demuestre que una matriz A con sus coeficientes en $\{-1, 0, 1\}$ y cuyas columnas a lo más poseen 2 coeficientes no nulos es $T.U.$.

HINT: Use inducción en la dimensión de las submatrices cuadradas B.

b) Si le alcanzan las `UD's` o está muy aburrido, pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$, es invertible y $T.U.$ entonces $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$.

HINT: Recuerde que existe una fórmula para escribir los coeficientes de A^{-1} en función de subdeterminantes de A.

P11 Dado $a \in \mathbb{R}$, diagonalice la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

[1] B es una submatriz cuadrada de A si B es una matriz cuadrada que se obtiene de A al eliminar algunas filas y columnas. En particular, los coeficientes de A son submatrices cuadradas, de tamaño 1