

Clase Auxiliar N° 12
06 de Noviembre de 2008

P1 Diga cuales de las siguientes matrices son diagonalizables y, si es así, diagonalice.

$$\text{I) } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{II) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{III) } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{IV) } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

P2 Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Usted sabe que 1 y -3 son valores propios de T y que sus vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la definición de T .

P3 a) Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ no invertible, simétrica tal que

$$\text{Ker}(A + I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

i) Demuestre que los valores propios de A son 0 y -1 .

ii) Demuestre que $\text{Ker}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

b) Sean $k, n > 1$. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Demuestre que 0 es el único valor propio de A y concluya que A no es diagonalizable.

c) Sea $n > 1$. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es diagonalizable entonces $\text{Ker}(A^2) \subseteq \text{Ker}(A)$

P4 Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

a) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión.

b) Calcular una base de V^\perp

P5 Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

- Obtenga una base de W .
- Ortonormalice la base encontrada en a)
- Encuentre una base de \mathbb{R}^4 que contenga a la base encontrada en b).

P6 Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que

$$T(x) = \langle v, x \rangle v.$$

- Pruebe que $Im(T) = \langle \{v\} \rangle$ y que $Ker(T) = \langle \{v\} \rangle^\perp$.
- Pruebe que $dim(Ker(T)) = n - 1$.
- Sea $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base de $\langle \{v\} \rangle^\perp$. Pruebe que v_1, \dots, v_{n-1} son vectores propios de T asociados al valor propio 0.
- Pruebe que T es diagonalizable, i.e., que existe una base de \mathbb{R}^n de vectores propios de T .

Estrategia que nunca falla para responder a la pregunta: ¿es A diagonalizable?

Pregunta: ¿Es $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable?

- Mire la matriz. Si es simétrica entonces **es diagonalizable**. Si no lo es vaya directo al paso b.
- Calcule $|A - \lambda I|$ y sus raíces. Si hay raíces complejas **A no es diagonalizable**. Si no hay raíces complejas pase a c.
- Si las n raíces reales son distintas entonces **A es diagonalizable**. Si no es así, vaya al paso d.
- Para las raíces repetidas resuelva el sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$. Obtenga la dimensión del espacio solución ($mg(\lambda)$) y compárela con $ma(\lambda)$.
Si $mg(\lambda) < ma(\lambda)$ (para alguno de los λ) entonces **A no es diagonalizable**. Si $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ para todos los λ entonces **A es diagonalizable**.