FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Álgebra Lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N° 10

23 de Octubre de 2008

P1 Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $MS_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas con coeficientes reales de 2×2. Se define la transformación lineal $T : MS_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = c + (b+a)x + 2ax^2$$

Considere además las bases $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$.

a) Calcular la matriz A, representante de T con respecto a estas bases (β y β').

b) Encuentre la transformación lineal $S : MS_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cuya matriz representante relativa a las bases β y β' es A^t

P2 Sea E un *ev* sobre $\mathbb{K}$. Sean V, W *sev* de E tal que $V \cap W = \{0\}$ y $S :\ V \to W$ una transformación lineal. Se define $T :\ V \oplus W \to W$ como

$$T(x) = x_w + S(x_v), \quad donde\ x = x_v + x_w,\ con\ x_v \in V, x_w \in W$$

a) Pruebe que T es lineal.

b) Si $\beta_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\beta_w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases de V y W, respectivamente, demuestre que $\beta_{vw} = \beta_v \cup \beta_w$ es base de $V \oplus W$.

c) Si se sabe que A_S es la matriz representande de S con respecto a las bases β_v y β_w, calcule la matriz representante de T con respecto a las bases β_{vw} y β_w.

d) Pruebe que $\{v_1 - S(v_1), \ldots, v_n - S(v_n)\}$ es base de $\mathbb{K}er(T)$.

e) Muestre que T es sobreyectiva. *HINT*: use TNI.

P3 Considere $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = \frac{A + A^t}{2}$

a) Pruebe que T es lineal.

b) Encuentre $\mathbb{K}er(T)$ y calcule $rango(T)$.

c) Considere la siguiente base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Calcule la matriz representante de T cuando la base del espacio de partida y de llegada es β.

d) Usando matrices de pasaje (o de cambio de base) encuentre la matriz representante de T cuando en el espacio de partida y de llegada considera la base canónica.

P4 Denotemos por $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 2 y sea β la base canónica $\{1, x, x^2\}$ de este espacio. Considere

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la base $\beta^{'}$ de $\mathcal{P}_2$ tal que Q sea representante de la identidad de $\mathcal{P}_2$ con $\beta^{'}$ en $\mathcal{P}_2$ con β.

b) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases β en $\mathcal{P}_2$ y canónica en $\mathbb{R}^3$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases $\beta^{'}$ en $\mathcal{P}_2$ y canónica en $\mathbb{R}^3$, donde $\beta^{'}$ es la base encontrada en *a*).

c) Calcule $dim(Ker(T))$ y el rango de T.

P5 Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases canónicas es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar una base de $\mathbb{K}er\varphi$ y de $\mathbb{I}m\varphi$. ¿Es φ inyectiva?.

b) Considere β_3, β_4 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Se define

$$\beta_3^{'} = \{e_1 + e_2 - 2e_3, e_1 + e_2 + 2e_3, -e_1 + e_2\}, \quad \text{donde } e_i \in \beta_3,\ i = 1, 2, 3$$

Pruebe que $\beta_3^{'}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

c) Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la función lineal representada por la matriz A, con respecto a las bases $\beta_3^{'}$ y β_4, es decir, $\mathcal{M}(\psi)_{\beta_3^{'}\beta_4} = A$. Verifique que $\varphi \neq \psi$. ¿Porqué ocurre esto, aún cuando sabemos que ambas transformaciones tienen a A como matriz representante?.

d) Ahora suponga que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y que $\mathcal{M}(\psi)_{\beta_3\beta_4} = A$, con β_3, β_4 las bases canónicas respectivas. Encuentre una fórmula explícita para φ.

Recuerde que si estudió las 55 horas no tiene nada de que preocuparse.