FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Complementos clase Auxiliar N°9

22 de Octubre de 2008

P8 En este ejercicio queremos probar lo siguiente:

Sean $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales.

$$\mathbb{K}er(T) \subseteq \mathbb{K}er(S) \Rightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{R},\ tq\ S = \alpha T$$

Después de estar mucho rato mirando el enunciado anterior sin poder hacer nada en este infinitamente peliagudo ejercicio Ud. ha decidido mirar una versión ultra-guiada del problema que Ud., con todo lo que ha estudiado ya para el `control 2`, resolverá al instante:

a) Encuentre las matrices representantes de T y S con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$.

b) Usando la parte anterior, pruebe que $\exists\ v_T, v_S \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ T(x) = \langle v_T, x\rangle$ y $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ S(x) = \langle v_S, x\rangle$.

c) Demuestre que $\mathbb{K}er(T) = \{v_T\}^\perp$ y que $\mathbb{K}er(S) = \{v_S\}^\perp$.

d) Considere $v \in \mathbb{R}^n$. Muestre que $\{v\}^\perp$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y que, además $\{v\}^\perp = \langle\{v\}\rangle^\perp$.

e) Demuestre que $\mathbb{R}^n = \langle\{v_T\}\rangle \oplus \{v_T\}^\perp$.

f) Muestre que $\exists\ a \in \langle\{v_T\}\rangle$, $\exists\ b \in \{v_T\}^\perp$ tal que $v_S = a + b$.

g) Usando de manera ingeniosa el número real $\langle v_S, b\rangle$, pruebe que $b = 0$ y que, por lo tanto, $v_S \in \langle\{v_T\}\rangle$.

h) Finalmente, concluya que $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ S(x) = \alpha T(x)$.

Mucha gudluck para el Control 2!!! (: