FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N°9

16 de Octubre de 2008

P1 Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $\mathcal{P}_m(X)$ polinomios de grado menor igual a m a coeficientes reales. Se define:

$$V = \{p(X) \in \mathcal{P}_m(X) \quad : \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}\,, \quad a_i = a_{m-i}\}$$

a) Probar que V es un s.e.v. de $\mathcal{P}_m(X)$ sobre los reales

b) Encontrar una base de V y deduzca su dimensión

c) Probar que $\mathcal{P}_m(X) = V \oplus \mathcal{P}_{n-1}(X)$

d) Se define:

$$V^{'} = \{p(X) \in \mathcal{P}_m(X) \quad : \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}\,, \quad a_i = -a_{m-i}\}$$

Pruebe que $V^{'}$ es un s.e.v. de $\mathcal{P}_m(X)$ y que además $\mathcal{P}_m(X) = V \oplus V^{'}$.

P2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, lineal, tal que

$$Ker(f) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

a) Indicar (justificando) $dim(Ker(f))$ y una base del mismo

b) Encuentre $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, para todo $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

c) Encuentre una base de $Im(f)$

d) ¿Es f inyectiva? ¿epiyectiva?

P3 Algunos ejercicios básicos y no tanto:

a) Con respecto a las matrices representantes, ¿Dependen éstas del orden que uno elija para los elementos de las bases?

b) Sea E un ev de dimensión finita y $T : E \to E$ función lineal. Pruebe que:

$$E = \mathbb{K}er(T) \oplus \mathbb{I}m(T) \Leftrightarrow \mathbb{K}er(T^2) = \mathbb{K}er(T)$$

HINT: Recuerde que "$= \Leftrightarrow \subseteq \wedge \supseteq$". Para $\Rightarrow$ use: $\mathbb{K}er(T^2) \subseteq E$ y que si $T^2(x) = 0$ entonces $T(x) \in \mathbb{K}er(T)$. Para $\Leftarrow$ acuérdese del TNI y de la fórmula para $dim(U + V)$.

P4 Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad y \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Encuentre T si, por añadidura, se sabe que $\mathbb{K}er(T) = \mathbb{I}m(T)$.

HINT: Encuentre primero los valores de T sobre una base de $\mathbb{R}^4$.

P5 Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal cuya representación matricial, con respecto a las bases canónicas es la matriz A.

a) Encontrar la fórmula general de φ.

b) Encontrar una base de $\mathbb{K}er\varphi$ y de $\mathbb{I}m\varphi$.

P6 *a*) Su perro, un estudiante dedicado, ha calculado matrices representante toda la semana. Notoriamente preocupado se acerca a usted y le muestra una matriz representante que tiene una columna completamente conformada por ceros. ¿Cómo tranquiliza a su perro?

b) A pesar de la duda, su perro no ha decaído en su estudio. Luego de un rato le muestra extrañado una matriz representante que tiene una fila completamente conformada por ceros. ¿Qué puede decirle a su perro?

P7 Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases canónicas es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar una base de $\mathbb{K}er\varphi$ y de $\mathbb{I}m\varphi$. ¿Es φ inyectiva?.

b) Considere β_3, β_4 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Se define

$$\beta_3^{'} = \{e_1 + e_2 - 2e_3, e_1 + e_2 + 2e_3, -e_1 + e_2\}, \quad \text{donde } e_i \in \beta_3,\ i = 1,2,3$$

Pruebe que $\beta_3^{'}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

c) Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la función lineal representada por la matriz A, con respecto a las bases $\beta_3^{'}$ y β_4, es decir, $\mathcal{M}(\psi)_{\beta_3^{'}\beta_4} = A$. Verifique que $\varphi \neq \psi$. ¿Porqué ocurre esto, aún cuando sabemos que ambas transformaciones tienen a A como matriz representante?.

d) Ahora suponga que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y que $\mathcal{M}(\psi)_{\beta_3\beta_4} = A$, con β_3, β_4 las bases canónicas respectivas. Encuentre una fórmula explícita para φ.

P8 Sean $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales. Pruebe que:

$$\mathbb{K}er(T) \subseteq \mathbb{K}er(S) \Rightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{R},\ tq\ S = \alpha T$$

HINT: una forma de hacerlo es utilizando Matrices Representantes.

`Estudien! El control 2 se viene en cualquier momento!! o.O`