FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Algunos Ejercicios Resueltos

Para el Control 2

P1 Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$$

(i) Determine una base de W y su dimensión.

(ii) Extienda la base encontrada en (i) a una base de $\mathbb{R}^4$.

(iii) Encuentre una base ortonormal de W y de $W^\perp$ (el ortogonal de W).

(iv) Encuentre la descomposición de $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ en $W + W^\perp$.

Sol: (i) Primero que nada bautizaremos a los vectores con los siguientes nombres:

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}$

Nuestro candidato a base es $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$. Claramente sabemos que B genera a W, de hecho es la definición de W!!!

Nos falta ver que esta base sea l.i.[1]. Para ello crearemos la famosa matriz de vectores acostados:

$$A = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

[1] Recuerde que una base debe cumplir dos cosas: generar y ser l.i.

Y la vamos a pivotear!!! (yeah!)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Note que la fila de la matriz que inicialmente contenía a v_3 se ha hecho cero. Eso quiere decir que de alguna forma (llegue usted a saber como) pudimos escribir v_3 en función de los otros dos vectores. En otras palabras... v_3 era l.d. con los otros vectores!

Nuestro candidato a fallado... no era l.i. Pero podemos redefinirlo como:

$$B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

Conjunto que genera y además es l.i. Es la base que estamos buscando!

(ii) Tenemos una base de 2 vectores y trataremos de extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$. Sabemos que $\mathbb{R}^4$ tiene dimensión 4, por lo que nos faltan dos vectores! En un ataque de genialidad usted podría agregar dos vectores cualquiera a la base para así tener una dimensión correcta... pero resulta que no todo es tan fácil en la vida. Usted debe asegurarse que esos dos vectores que agregue sean l.i. con los otros. Para ello, yo le recomiendo encontrar dos vectores u_1 y u_2 que cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\langle u, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_2 \rangle = 0$$

Osea.. dos vectores ortogonales a v_1 y v_2.

Si consideramos $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ las dos ecuaciones anteriores se traducen en:

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow x + y + z + w = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow x - y + z - w = 0$$

Tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas. No debe resultarle sorprendente que las soluciones de este sistema sean infinitas. De hecho.. vamos a tener que usar dos variables libres... dos libertades para las soluciones. Luego de un estudio del sistema podemos notar que las soluciones tienen la siguiente forma[2]:

[2]Usted ya sabe solucionar estos sistemas del control 4. Así que hágale honor a su gran calificación en aquel control e intente hacerlo usted mismo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con α y β numeros reales (las libertades del problema).

De estas infinitas soluciones nos sirven cualquieras (que no sean ld entre ellas). Por flojera tomaremos los siguientes casos: $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$ y $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$.

Por lo tanto, las dos soluciones que ocuparemos son:

$$u_1 = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y la base que andamos buscando (base de $\mathbb{R}^4$) es:

$$\{v_1, v_2, u_1, u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) Necesitamos una base ortonormal de W (que llamaremos B_W) y una base ortonormal de $W^\perp$ (que llamaremos $B_{W^\perp}$). Recordemos que una base ortonormal se refiere a una base que todos sus vectores sean ortogonales entre sí y, además, todos tengan norma 1.

Para obtener B_W lo único que necesitamos es ortonormalizar la base encontrada en la parte (i). Lo primero que se nos viene a la mente es el método de Gram-Schmidt. Sip.. puede ser lo más general.. pero antes que eso miremos la base sobre la cual vamos a trabajar:

$$B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Después de meditarlo un poco nos damos cuenta que v_1 y v_2 son ortogonales! (basta que calcule su producto punto). Nos falta solamente normalizarlos. Y bueno.. eso es fácil. Dividimos cada uno de esos vectores por su norma y la base queda:

$$B_W = \left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora, por otro lado sabemos que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ y en virtud a lo calculado en la parte (ii) (recuerde que para completar la base usamos dos vectores **ortogonales**), podemos afirmar que la base ortonormal de $W^\perp$ ($B_{W^\perp}$) se obtendrá ortonormalizando la siguiente base:

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Al ojo nos damos cuenta que u_1 y u_2 son ortogonales! Nos falta solamente normalizarlos. Finalmente la base queda como:

$$B_{W^\perp} = \left\{ \frac{1}{\|u_1\|} u_1, \frac{1}{\|u_2\|} u_2 \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(iv) Debemos escribir v de la forma:

$$v = w + w_\perp$$

con $w \in W$ y $w_\perp \in W^\perp$.
Sabemos que todo lo que pertenece a W puede escribirse de la forma:

$$w = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Y todo lo que pertenece a $W^\perp$ puede escribirse de la forma:

$$w_\perp = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación $v = w + w_\perp$ se traduce en:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde α, β, γ y δ son nuestras incógnitas. Tenemos un sistema de 4x4. Escribimos la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & | & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

La pivoteamos[3]!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

[3]Intente hacerlo usted mismo. Es bastante fácil... lo único raro es un intercambio de filas en el último paso

De ahí se resuelve el sistema:

$$\alpha = 5/2$$

$$\beta = -1/2$$

$$\gamma = -1$$

$$\delta = -1$$

Y la forma de escribir v es:

$$v = w + w_{\perp} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

$\boxed{\textbf{P2}}$ Sea $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(i) Probar que U es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Encuentre una base de U y su dimensión.

(iii) Pruebe que $V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) / c, d \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$

(iv) Encuentre un isomorfismo entre U y $\mathbb{R}^2$

Sol: (i) Debemos demostrar que para cualquier par de tipos que vivan en U, cualquier combinación lineal de ellos también vive en U. En términos de demostración:

PDQ: $(\forall x, y \in U)\, (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\, \alpha x + \beta y \in U$

Demostrémoslo!

Sean $x, y \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Como $x, y \in U$ se pueden escribir de la forma:

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

Bueno.. aquí hay que dejar claro que, al decirnos U es s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se refieren (entre otras cosas) que debemos ocupar la suma y ponderación que conocemos tradicionalmente en las matrices. Por lo tanto:

$$\alpha x + \beta y = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ -\alpha b - \beta d & \alpha a + \beta c \end{bmatrix}$$

Si bautizamos $\mu = \alpha a + \beta c$ y $\lambda = \alpha b + \beta d$ se tiene que:

$$\alpha x + \beta y = \begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ -\lambda & \mu \end{bmatrix}$$

Lo que nos indica claramente (tan sólo mirando) que $\alpha x + \beta y \in U$.

Por lo tanto U es s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Para encontrar una base de U vamos a tomar un elemento cualquiera de U y vamos a ver si lo podemos escribir en base a otros más conocidos. Sea $u \in U$. Podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nuestro candidato a base será entonces:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Debemos chequear que genere, sea l.i. y además que los elementos de la base pertenezcan a U. Esto último se verifica al ojo. El hecho que genere es casi por construcción (fíjese como encontramos estas matrices de la base). El hecho de que sean l.i. se prueba de esta manera:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Así que demostrémoslo...

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Por lo tanto B es l.i. Lo que quiere decir que B es base de U. La dimensión de U es entonces 2.

(iii) Debemos demostrar algo muy parecido a la parte i): Para cualquier par de tipos que vivan en V, cualquier combinación lineal de ellos también vive en V. En otras palabras:

PDQ: $(\forall x, y \in V)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,\alpha x + \beta y \in V$

Demostrémoslo! (pero esta vez más rapidito)

Sean $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Como $x, y \in V$ se pueden escribir de la forma:

$$x = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\alpha x + \beta y = \begin{bmatrix} \alpha c + \beta e & \alpha d + \beta f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si definimos $\mu = \alpha c + \beta e$ y $\lambda = \alpha d + \beta f$ se tiene que:

$$\alpha x + \beta y = \begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que nos indica claramente que $\alpha x + \beta y \in V$.

Ahora debemos ver que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$. Para ello necesitamos verificar dos cosas:

- $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U + V$
- $U \cap V = \{0\}$

Ver que la intersección tiene únicamente al cero es fácil. Tomemos una matriz que viva en la intersección[4] (que pertenezca a U y a V). Esta matriz, como pertenece a U, se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Pero también pertenece a V!!! Por lo tanto sus coeficientes de la segunda fila son nulos ($-b = a = 0$). Luego $a = b = 0$ y la matriz no le queda otra que ser la matriz cero.

Para ver que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U + V$, debemos escribir cualquier matriz de 2×2 como suma de una matriz de U más una matriz de V. Intentémoslo!

[4] La idea es demostrar que esta Matriz es nula

Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Claramente A se puede escribir de la siguiente forma: $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Queremos escribir A como la suma de alguien en U con alguien en V. Osea:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$p = a + c$$

$$q = b + d$$

$$r = -b$$

$$s = a$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a que:

$$a = s$$

$$b = -r$$

$$c = p - s$$

$$d = q + r$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -r \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p-s & q+r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osea.. cualquier Matriz de 2×2 se puede escribir como alguien en U más alguien en V.

Y como la intersección de U y V es solamente el 0, entonces $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

(iv) El isomorfismo a considerar es $\varphi : U \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right) = (a, b)$$

Queda para usted probar que es un morfismo y además es biyectivo (no sé preocupe.. no es muy difícil).

Mucha suerte en su control y recuerden que cualquier duda nos ubican en el mail (o si nos ven por ahí en la universidad).

También recuerden los recuerditos.

Saludos!