MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N°8

09 de Octubre de 2008

P1 Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los subconjuntos W_1 , W_2 de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siguientes:

$$W_1 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \mid \ A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \qquad W_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \mid \ A_{11} + A_{22} = 0\}$$

a) Demuestre que W_1 es un s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) Demuestre que W_2 es un s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

c) Encuentre una base y la dimensión de W_1

d) Encuentre una base y la dimensión de W_2

e) Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$

f) ¿Cuál es la dimensión de $W_1 + W_2$?

P2 Sea $T : \mathcal{P}_4 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$T(p) = p(1) + 2P(-1)$$

a) Pruebe que T es lineal

b) Encuentre base de $Ker(T)$ e $Im(T)$. ¿Qué puede decir de la función?

P3 Encuentres todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que:

$$Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad Im(T) = Ker(T)$$

P4 Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $\mathcal{P}_m(X)$ polinomios de grado menor igual a m a coeficientes reales.

Se define:

$$V = \{p(X) \in \mathcal{P}_m(X) \quad : \quad \forall i \in \{0, \ldots, m\}\,, \quad a_i = a_{m-i}\}$$

a) Probar que V es un s.e.v. de $\mathcal{P}_m(X)$ sobre los reales

b) Encontrar una base de V y deduzca su dimensión

c) Probar que $\mathcal{P}_m(X) = V \oplus \mathcal{P}_{n-1}(X)$

d) Se define:

$$V' = \{p(X) \in \mathcal{P}_m(X) \quad : \quad \forall i \in \{0, \ldots, m\}\,, \quad a_i = -a_{m-i}\}$$

Asumiendo que V' es un s.e.v. de $\mathcal{P}_m(X)$ pruebe que

$$\mathcal{P}_m(X) = V \oplus V'$$

$\boxed{\textbf{P5}}$ Pruebe que:

$$A \text{ invertible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{todo sistema } Ax = b \text{ tiene solución}$$

HINT: Usea Teorema Núcleo Imagen

$\boxed{\textbf{P6}}$ Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, lineal, tal que

$$Ker(f) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Indicar (justificando) $dim(Ker(f))$ y una base del mismo

b) Encuentre $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, para todo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

c) Encuentre una base de $Im(f)$

d) ¿Es f inyectiva? ¿Epiyectiva?

Recuerditos muy básicos de Transformaciones Lineales:

- Una **Transformación Lineal** es un función T

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ v &\to Av \end{aligned}$$

  con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que:

  - $T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$
  - $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$

- Sea $T : U \to V$ una transformación lineal

  - T inyectiva $\quad \Leftrightarrow \quad Ker(T) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad dim(Ker(T)) = 0$
  - T epiyectiva $\quad \Leftrightarrow \quad Im(T) = V \quad \Leftrightarrow \quad dim(Im(T)) = dim(V)$
  - Si T es inyectiva entonces

$$\{u_i\}_{i=1}^k \text{ es l.i. en } U \quad \Rightarrow \quad \{T(u_i)\}_{i=1}^k \text{ es l.i. en } V$$

- **Teorema Núcleo Imagen (T.N.I.):** Sean U, V e.v. sobre un cuerpo K, $T : U \to V$ una transformación lineal con $dim(U) < \infty$. Entonces:

$$dim(U) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$$

- Corolarios T.N.I:

  - Si $dim(U) = dim(V)$ entonces

$$T \text{ inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ epiyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ biyectiva}$$

  - $dim(U) > dim(V) \quad \Rightarrow \quad T$ no puede ser inyectiva
  - $dim(U) < dim(V) \quad \Rightarrow \quad T$ no puede ser epiyectiva
  - $U \cong V \quad \Leftrightarrow \quad dim(U) = dim(V)$

- Estudien!