MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

# Clase Auxiliar N°7

25 de Septiembre de 2008

**P1**
a) Pruebe que una recta $L$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólo sí $0 \in L$.
b) Demuestre que un plano $\Pi$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólo sí $0 \in \Pi$.

**P2** Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Pruebe que si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un s.e.v de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto $AV = \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ y = Ax,\ x \in V\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

**P3** Se define para $v \in \mathbb{R}^n$ el siguiente conjunto:

$$\{v\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, v\rangle = 0\}$$

Llamado el *subespacio ortogonal a v*. Pruebe que $\{v\}^\perp$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

**P4** Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 0\}$. Pruebe que $A$ es s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

**P5** Considere $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y = 0\}$. ¿Es $B$ un s.e.v de $\mathbb{R}^2$?.

**P6** Sean $S_1, S_2$ s.e.v. de un espacio vectorial $E$.

a) Pruebe que $S_1 \cap S_2$ es un s.e.v. de $E$
b) Muestre, con un contrajemplo, que $S_1 \cup S_2$ no es, en general, un s.e.v de $E$.

**P7** Sean $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto l.i. y $A$ una matriz invertible. Pruebe que el conjunto $A\mathcal{C} = \{Av_1, Av_2, Av_3\}$ es también un conjunto l.i..

**P8** Considere $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_3 = c_1v_1 + c_2v_2$. Verifique que $\mathcal{C}$ es un conjunto l.d..

**P9** Demuestre que si $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i., entonces $\forall\ \mathcal{C} \subseteq V$, $\mathcal{C}$ es un conjunto l.i..

**P10** Considere $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores l.i.. Pruebe que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $V' = \{v_1 + \alpha v_2, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es l.i..

**P11** Considere $E$ un *e.v.* de dimensión $n$ y considere una base $\alpha = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $E$. Se definen, $\forall\ i = 1, \ldots, p$, $b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}a_j$, donde los $\alpha_{ij}$ satisfacen: $j < i \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$ y $\forall\ i = 1, \ldots, p,\ \alpha_{ii} \neq 0$. Pruebe que $\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es un conjunto l.i.. ¿Es $\beta$ una base de $E$?

**P12** Considere $V = \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \textit{sucesion real} \ : \ s_{n+2} = s_{n+1} + s_n\}$.

a) Demuestre que $V$ es *s.e.v.* del espacio vectorial de las sucesiones reales.
b) Encuentre una base de $V$ e indique su dimensión.
*HINT*: Fíjese que si $(s_n) \in V$, entonces $(s_n)$ sólo depende de $s_0$ *y* $s_1$.

**P13** ¿Es $\beta = \{1 + 6x^2, 4x, 1 + 3x + 5x^2\}$ base del e.v. $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$?

**P14** Sea $E = \{f \ : \ f : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \text{ función}\}$, que es e.v. sobre $\mathbb{R}$.

Dados, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, se definen:

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in E \ : \ \forall \ n \ \mathbb{Z}, \ f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in E \ : \ \forall \ n \ \mathbb{Z}, \ f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 1\}$$

¿Son $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ s.e.v. de $E$? En caso de que algún subconjunto sea s.e.v, encuentre una base asociada, si es que ésta existe.

**P15** Sea $\mathcal{F} = \{Asen(x + \varphi) \ : \ A, \varphi \in \mathbb{R}\}$. Pruebe que $\mathcal{F}$ es un s.e.v. del e.v. de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Encuentre una base de $\mathcal{F}$.

**P16** Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones de valores reales. Sea $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones que poseen un número finito de términos no nulos.

*a*) Pruebe que $\mathcal{S}_0$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}$.

*b*) ¿Es $\mathcal{S}_0$ un e.v. de dimensión finita?. Justifique su respuesta.

**P17** Determine si los siguientes cojuntos son o no s.e.v de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. De ser su respuesta afirmativa encuentre una base:

*a*) $U_1 = \{ax^2 + bx + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

*b*) $U_2 = \{ax^2 + b^2x + b + c \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

*c*) $U_3 = \{ax^2 + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

## *Recuerditos muy básicos sobre e.v.:*

*I.* $\phi \subsetneq U \subseteq V$ es s.e.v. de un e.v. $V$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ si y sólo si $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall \ x, y \in U, \ \alpha x + \beta y \in U$.

*II.* Un subconjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial se dice *l.i.* si la ecuación $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, nos dice que $\alpha_i = 0, \ \forall \ i \in \{1, \ldots, n\}$. En otras palabras, que la única solución al sistema $\mathcal{V}\alpha = 0$, donde $\mathcal{V}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_i, i = 1, \ldots, n$, es $\alpha = 0$.

*III.* A un conjunto que no es *l.i* se le llama *conjunto l.d.*.

*IV.* Un conjunto finito de vectores $\beta$ es una base de un s.e.v. $V$ si $\beta$ *genera* $V$, ie, "*todo vector en $V$ se escribe como combinación lineal de vectores en $\beta$*" y "$\beta$ es un conjunto l.i.". En otras palabras, "*todo vector en $V$ se escribe, de manera única, como combinación lineal de vectores en $\beta$*".

*V.* Las bases de un e.v. no son únicas. Por ejemplo, si $\beta$ es base, entonces, $\forall \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, el conjunto ponderado $\alpha \cdot \beta$ es base [1].

*VI.* No todo e.v. posee base por ejemplo, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, los polinomios de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, no posee una base. En cambio, $\forall \ n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ sí posee base.

*VII.* No olviden completar su dosis semanal de *UD's*. Quedan sólo 2 controles y un examen!!

[1] *Ojo* que hay bases de un mismo e.v. que no son ponderación de otra base del mismo e.v.