Complementos C2

25 de Septiembre de 2008

I.¿Cómo calculo el rango de una matriz A?

Es fácil, sólo hay que seguir los siguientes pasos:

1. Se debe escalonar "hacia abajo" la matriz A.
2. Se cuenta el número de filas que **NO** tengan todas sus componente nulas.

Este último numerito calculado es el rango de la matriz.

II. ¿Cómo verifico si un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ es l.i.?¿Cuándo es l.d.?

Considere $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Queremos ver si ese conjunto es l.i. o l.d. . Veremos 2 formas de hacerlo.

Forma 1:

* Se construye una matriz cuyas columnas sean los vectores del conjunto que nos dan.

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{bmatrix}$$

* Se escalona "hacia abajo" la matriz A.
* Si todos los pivotes (elementos de la "diagonal") son no nulos, se concluye que los vectores son l.i., en caso contrario, de existir un pivote igual a 0 se debe decir que los vectores son l.d..

Forma 2:

* Se construye una matriz cuyas filas sean los vectores del conjunto que nos dan.

$$A = \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_m^t \end{bmatrix}$$

* Se escalona "hacia abajo" la matriz A.
* Si todos las filas son no nulas, se concluye que los vectores son l.i., en caso contrario, de existir una fila con todos sus elementos iguales a 0 se debe decir que los vectores son l.d..

III. ¿Cómo extraigo una base del espacio generado por un conjunto de vectores?

Considere $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto de vectores . Queremos extraer un subconjunto de vectores que sea una base del subespacio generado por el conjunto anterior. Para ello debemos seguir la siguiente receta:

* Se construye una matriz cuyas filas sean los vectores del conjunto que nos dan.

$$A = \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix}$$

* Se escalona "hacia abajo" la matriz A.
* El conjunto de los vectores asociados a filas no nulas es un conjunto de vectores l.i..
* Como genera y es l.i., se concluye que el conjunto de vectores asociados a filas no completamente nulas (es decir que tienen elementos distintos de 0) es una base del espacio dado.

IV. ¿Cómo encuentro las coordenadas de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ en una base no tan trivial como la canónica?

Considere la base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y un vector $x \in \mathbb{R}^n$. Queremos escribir

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

En otras palabras, debemos encontrar los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Para esto notemos que:

$$\begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Es decir, multiplicar una matriz cualquiera por un vector es simplemente sumas las columnas de la matriz ponderadas por los coeficientes del vector.

Así, en realidad, queremos resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Este sistema *siempre* tendrá solución, pues las columnas de la matriz son l.i. (por ser base), luego la matriz es invertible.

Ejemplo: Para no escribir tanto, veremos un ejemplo de esto cuando $n = 4$, o sea en $\mathbb{R}^4$.

Para encontrar las coordenadas de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ en la base:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se debe resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

The End