Clase Auxiliar N°6

10 de Septiembre de 2008

P1 Se definen las rectas:

$$L_1: \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad y \qquad L_2: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

a) Verifique que L_1 y L_2 no se intersectan.

b) Encuentre la ecuación normal del plano Π que contiene a la recta L_1 y es paralelo a L_2.

c) El punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pertenece a L_2. Encuentre la proyección ortogonal de P sobre el plano Π de la parte (b).

d) Dé la ecuación del plano paralelo a Π que está a la misma distancia de L_1 y L_2.

P2 Sean Π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, Π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y cuya dirección es $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2. Entregue un vector director de dicha recta.

b) Encuentre el punto P_2 de intersección de la recta $L1$ y Π_1.

c) Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.

d) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.

P3 Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo tal que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a + c & d \end{bmatrix}$$

Justifique ya sea encontrando M o por el contrario probando que no existe.

P4 Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica que $A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

P5 Sean $p, q, r \in \mathbb{R}^3$ tres puntos no colineales. Sea Π el plano que contiene a los puntos p, q y r. Pruebe que

$$x \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \text{y} \quad x = \alpha p + \beta q + \gamma r$$

P6 *a)* Sean A, B matrices de $n \times m$ con coeficientes reales. Pruebe que

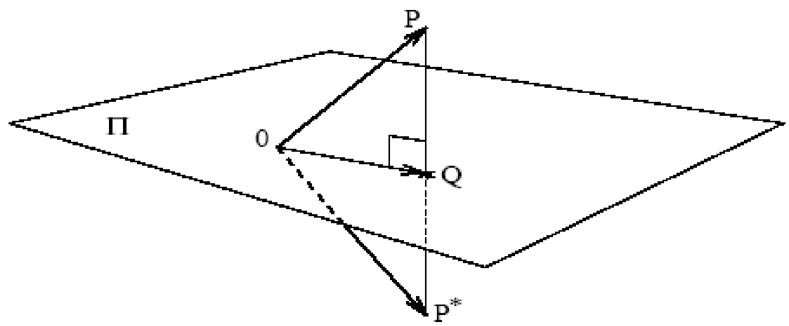
$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \ , \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, y \rangle = \langle Bx, y \rangle$$

b) Sean A, B matrices de $n \times n$ **simétricas** con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$$

c) Demuestre que si una matriz cuadrada A verifica $A^k = I$ para algún natural $k \geq 1$, entonces A es invertible (I es la matriz identidad).

P7 Considere el plano Π de ecuación $x + y - z = 0$ y la recta L de vector director $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que pasa por el origen. Se define el punto simétrico del punto P respecto del plano Π como aquel punto del espacio que se encuentra sobre la recta perpendicular al plano Π y que pasa por P, a la misma distancia del plano que P pero en la dirección contraria.



a) Considere $L' = \{P \in \mathbb{R}^3 \ : \ P \text{ es el simétrico respecto de } \Pi \text{ de algún punto en } L\}$. Pruebe que L' es una recta y dé la ecuación de dicha recta.

b) Calcular la ecuación del plano Π' perpendicular al plano Π que contiene a la recta L (dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales).

c) Probar que $L' \subseteq \Pi'$

P8 Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1

b) Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$

c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L

d) Calcule la distancia de P a la recta L