MA1B2: Álgebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Control Sorpresa

04 de Septiembre de 2008

P1 Sean P y Q puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \|x-P\| = \|x-Q\|\}$ es un plano. Encuentre:

a) Un punto que pertenezca a A.

b) Un vector normal al plano A.

P2 Se definen las rectas:

$$L_1: \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad y \qquad L_2: \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

a) Verifique que L_1 y L_2 no se intersectan.

b) Encuentre la ecuación normal del plano Π que contiene a la recta L_1 y es paralelo a L_2.

c) El punto $P = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ pertenece a L_2. Encuentre la proyección ortogonal de P sobre el plano Π de la parte (b).

d) Dé la ecuación del plano paralelo a Π que está a la misma distancia de L_1 y L_2.

P3 Sean

$$P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad D_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} D_2 = \begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Se define además:

$$L: \quad v = P + \lambda D \;, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Pi: \quad v = P + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \;, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Encuentre los puntos en L que están a distancia 2 de Π.

P4 Sea Π_0 el plano con vectores directores $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$ y que pasa por el origen.

a) Escriba la ecuación normal del plano Π_0.

b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por $P = (1,1,1)$ y no corta a Π_0.

c) Calcular la proyección de P sobre Π_0.

d) Calcular la distancia entre Π_0 y Π.

P5 Sean Π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, Π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = (0, 1, 1)$ y y cuya dirección es $D_1 = (1, 0, 0)$.

a) Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2. Entregue un vector director de dicha recta.

b) Encuentre el punto P_2 de intersección de le recta L_1 y Π_1.

c) Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.

d) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.

P6 *a*) Pruebe que una recta L es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólo sí $0 \in L$.

b) Demuestre que un plano Π es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólo sí $0 \in \Pi$.

P7 Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Pruebe que si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un s.e.v de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto $AV = \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ y = Ax,\ x \in V\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.

P8 Se define para $v \in \mathbb{R}^n$ el siguiente conjunto:

$$\{v\}^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, v\rangle = 0\}$$

Llamado el *subespacio ortogonal a v*. Pruebe que $\{v\}^{\perp}$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

P9 Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 0\}$. Pruebe que A es s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

P10 Considere $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y = 0\}$. ¿Es B un s.e.v de $\mathbb{R}^2$?.

P11 Sean S_1, S_2 s.e.v. de un espacio vectorial E.

a) Pruebe que $S_1 \cap S_2$ es un s.e.v. de E

b) Muestre, con un contrajemplo, que $S_1 \cup S_2$ no es, en general, un s.e.v de E.

P12 Sean $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto l.i. y A una matriz invertible. Pruebe que el conjunto $A\mathcal{C} = \{Av_1, Av_2, Av_3\}$ es también un conjunto l.i..

P13 Considere $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_3 = c_1v_1 + c_2v_2$. Verifique que $\mathcal{C}$ es un conjunto l.d..

P14 Demuestre que si $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i., entonces $\forall\ \mathcal{C} \subseteq V$, $\mathcal{C}$ es un conjunto l.i..

P15 Considere $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores l.i.. Pruebe que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $V' = \{v_1 + \alpha v_2, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es l.i..

Recuerdito de dependencia e independencia lineal:

- Un subconjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial se dice *l.i.* si la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

  Nos dice que $\alpha_i = 0,\ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$. En otras palabras, que la única solución al sistema $\mathcal{V}\alpha = 0$, donde $\mathcal{V}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_i, i = 1, \ldots, n$, es $\alpha = 0$.

- A un conjunto que no es *l.i* se le llama *conjunto l.d.*.