FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1B2: Algebra lineal
Profesora : María Leonor Varas
Auxiliares : Sebastián Astroza, Diego Morán

Clase Auxiliar N°3

21 de Agosto de 2008

P1 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \alpha x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Determine los valores de α, β para los cuales el sistema tiene: `(i)` una única solución, `(ii)` ninguna solución y `(iii)` infinitas soluciones. Encuentre las soluciones en cada uno de los casos.

b) Para $\alpha = 4$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior.

P2 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & & - & \alpha x_3 & & & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2\alpha x_4 & = & 2+\alpha \\ -x_1 & & & + & \alpha x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & = & 2\beta+\alpha-2 \end{array}$$

a) Determine los valores de α, β para los cuales el sistema tiene: `(i)` una única solución, `(ii)` ninguna solución y `(iii)` infinitas soluciones. Encuentre las soluciones en cada uno de los casos.

b) Para $\alpha = 1$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior.

P3 *a*) Sean $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^\top y \rangle$$

b) Sea $A = I_n + B^\top B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

1) $\langle Ax, x \rangle = ||x||^2 + ||Bx||^2$
2) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

P4 Encuentre la descomposición LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

P5 Sean Π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, Π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y cuya dirección es $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2. Entregue un vector director de dicha recta.

b) Encuentre el punto P_2 de intersección de la recta $L1$ y Π_1.

c) Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.

d) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.

Recuerditos de Sistemas Lineales Generales

- No hay solución cuando en la matriz escalonada $\widetilde{A}$ existe al menos una fila que tenga puros ceros y el coeficiente del lado derecho escalonado asociado sea $\widetilde{b}_i \neq 0$.
- Si el sistema tiene solución y la matriz escalonada posee al menos un peldaño de largo mayor o igual a 2 entonces hay infinitas soluciones.
- Si el sistema es *cuadrado* es equivalente decir que "todos los pivotes de la matriz escalonada son no nulos" y que "el sistema tenga solución única para cualquier lado derecho".

Recuerditos de Geometría

- La **RECTA** L que pasa por P y va en la dirección de d es el siguiente conjunto:

$$L = L_{P,d} = \{v \in \mathbb{R}^n \ \mid \ v = p + td \ \ , \ \ t \in \mathbb{R}\}$$

- La recta que pasa por P y tiene como vector normal a n es el siguiente conjunto (en $\mathbb{R}^2$):

$$L = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \langle v - P, n \rangle = 0\right\}$$

- Recta que pasa por los puntos P y Q:

$$L : \quad P + t(Q - P) \ \ , \ \ t \in \mathbb{R}$$

- El **PLANO** que pasa por P y tiene vectores directores d_1 y d_2 es el conjunto:

$$\Pi_{P,d_1,d_2} = \{v \in \mathbb{R}^n \ \mid \ v = P + sd_1 + td_2 \ \ s, t \in \mathbb{R}\}$$

- El Plano que pasa por P y tiene como vector normal a n es el siguiente conjunto (en $\mathbb{R}^3$):

$$\Pi = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \langle v - P, n \rangle = 0\right\}$$

- El plano que pasa por los puntos P, Q y R no colineales es:

$$\Pi : \quad P + t(Q - P) + s(R - P) \ \ t, s \in \mathbb{R}$$